MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS PRIMAIRE SECONDAIRE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

CABINET

SECRETARIAT GENERAL

DIRECTION DES FORMATIONS

REPUBLIQUE TOGOLAISE

Travail-Liberté-Patrie

MODULE DE FORMATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DES COLLEGES D'ENSEIGNEMENT GENERAL DU TOGO

Ce module est élaboré par :

M. Tapha ALEGBEH : Directeur de l'Enseignement Secondaire Général du MEPSFP

M. Talaki PERE : Directeur Régional de l'Education Golfe-Lomé Commune

M. Komlan NOUWOSSAN : Inspecteur de mathématiques IESG Golfe Ouest

M. Abdou Razak CISSE : Inspecteur de mathématiques IESG Adéta

M. Kokouvi DATE-MASSE : Inspecteur de Mathématiques IESG Vogan

M. Komlan Dodjidénou DJADJA-AVONYO : Professeur de Mathématiques CEG Agoe-Nyivé Centre

M. Agba SEYDOU : Professeur de Mathématiques CEG Kélégougan

Infographistes :

KOUEVI-KOKO Ekoué

OTTOU Komivi Flavien

Sous la Coordination de :

M. Essohanam Kokou BIYAO Directeur des Formations du MEPSFP.

PRESENTATION DU MODULE

Le PSE 2014-2025 prévoit prioritairement de développer un enseignement fondamental de qualité prenant en compte le primaire et le premier cycle du secondaire.

C'est dans cette perspective que le Ministère des Enseignements primaire, secondaire et de la Formation professionnelle (MEPSFP) s'est engagé avec l'accompagnement du Projet d'appui à la Réforme du collège (PAREC) pour une expérimentation visant à réformer et à développer les collèges en vue d'améliorer l'accès et la parité, la qualité et l'efficience.

L'amélioration de la qualité des enseignements/apprentissages passe par la révision du dispositif de formation initiale des professeurs et la mise en place d'un programme de formation continue axé sur la maîtrise de l'enseignement du français, des sciences expérimentales et des mathématiques.

L'enseignement des mathématiques au collège doit contribuer à la construction d'une culture scientifique et au développement de la maîtrise du langage logico-mathématique chez les apprenants. Les acteurs principaux que sont les enseignants doivent, pour ce faire, être outillés et posséder les compétences nécessaires pour l'organisation des apprentissages dans leurs classes pour atteindre cet objectif.

Le présent module est donc conçu pour servir de support pour la formation des professeurs de mathématiques des collèges du Togo. Il s'organise autour de trois unités de formation (UF).

La première Unité de Formation (UF1) d'une durée de 16 h est consacrée à la didactique des mathématiques.

La deuxième, l'UF2, d'une durée totale de 40 h, développe des fondamentaux en mathématiques et procède à la clarification de certaines notions qui prêtent à confusion.

La troisième, l'UF3, relative aux évaluations en mathématique, a une durée de 24 h.

OBJECTIFS DU MODULE

Objectif général :

Renforcer les capacités des professeurs de mathématiques des collèges en vue d'une meilleure organisation des apprentissages dans les classes.

Objectifs spécifiques :

- Conduire une activité pédagogique en classe
- Organiser l'évaluation des apprentissages en mathématiques

CONTENU DU MODULE DE FORMATION

Les trois Unités de Formation (UF) du module sont réparties en 8 séquences déclinées à leur tour en 21 séances telles que présentées dans le tableau ci-dessous :

DEMARCHE METHODOLOGIQUE DE LA FORMATION

La démarche étant participative, les formateurs s'attacheront à chaque séance à :

- Constituer des groupes de 6 à 8 stagiaires,
- Organiser les travaux de groupe conformément au temps imparti,
- Faire restituer en plénière 2 ou 3 groupes
- Organiser les débats en faisant réagir d'abord les autres groupes,
- Faire la synthèse à la fin de la séance

UNITE DE FORMATION 2

UF2 : Clarification de notions mathématiques

Présentation de l'UF2 :

La deuxième Unité de Formation porte sur la clarification de notions mathématiques ; elle vise essentiellement, d'une part, à éclairer davantage les enseignants sur les nuances entre les concepts de contrôle de pré-requis, d'activité de découverte et de renforcement de connaissances, et d'autre part, à renforcer leurs capacités dans la conduite des apprentissages de certaines notions clés du programme de mathématiques en vigueur au collège.

Objectifs de l'UF2 :

Les compétences visées par la présente UF2 sont :

- La maitrise des concepts de contrôle de pré-requis, d'activité de découverte et de renforcement de capacités
- La maitrise de certaines notions clés du programme de mathématiques en vigueur au collège

Objectifs spécifiques :

- Concevoir des activités adaptées au niveau des élèves
- Conduire au mieux l'apprentissage de certaines notions clés du programme

Contenu de l'UF2 :

L'UF2 comporte quatre (4) séquences subdivisées en dix (10) séances.

Unité de formation	Noms	Séquences	Séances	Durée
UF2 40H	CLARIFICATION DE NOTIONS MATHEMATIQUES ET APPROFONDISSEMENT	1 : **Activités de découverte / contrôle des pré-requis / Renforcement des connaissances antérieures**	1/**Contrôle de pré-requis et activités de découverte** - Conception d'exercices de contrôle des pré-requis - Construction d'une activité à partir des objectifs pédagogiques : Exemples ➢ Nombres décimaux relatifs (introduction en 6^e, produit en 5^e) ➢ Symétriques de deux droites perpendiculaires par rapport à une droite (5e) ➢ Droites des milieux (4 e) ➢ Théorème de Pythagore (4e) ➢ Angles inscrits (3^e) ➢ Propriétés de Thalès……	10H
			2/ Conception d'exercices de renforcement des connaissances	3H
			3/ Elaboration d'une fiche pédagogique	2H
			4/ Simulation à partir de la fiche élaborée	2H
		2 : Apprentissage du raisonnement et de la démonstration au collège	1/ Généralités sur le raisonnement et la démonstration	2H
			2/ Apprentissage du raisonnement et de la démonstration au cycle d'observation	3H
			3/ Apprentissage de la démonstration au cycle, d'orientation	3H
		3 : Approfondissement : Géométrie dans l'espace et Homothéties	1/ Différentes représentations, calculs d'aires et de volume d'un solide : cas d'un cône	7H
			2/ Positions relatives dans l'espace	4H
			3/ Homothéties en 3e	4H

SEQUENCE 1 DE L'UF2 : CONTROLE DE PRE-REQUIS / ACTIVITES DE DECOUVERTE / RENFORCEMENT DE CONNAISSANCES

Problématique

Les recommandations méthodologiques demandent à l'enseignant de s'appuyer constamment sur l'activité des élèves en évitant les exposés dogmatiques. Cependant, nombreux sont les enseignants qui éprouvent des difficultés dans le choix et l'élaboration des activités (non mobilisation des connaissances antérieures, absence de motivation …). Dans certains cas, les activités sont souvent trop longues et ne permettent pas aux élèves de dégager l'essentiel à retenir. Dans d'autres cas, les consignes ne sont pas claires et le vocabulaire est inadapté.

Le renforcement des acquis des classes antérieures à travers le contrôle des pré-requis laisse la place à la reprise systématique de ces acquis comme de nouvelles leçons. La conséquence est le non achèvement des programmes, faute de temps.

Cette séquence permettra de faire donc une clarification quant à la place et le rôle du contrôle des pré-requis, des activités de découverte et du renforcement des connaissances antérieures.

SEANCE 1 (3 heures) : **Contrôle de pré-requis et activités de découverte**

Consignes pour le formateur

- Amener les stagiaires à faire la part entre le contrôle des pré-requis, le renforcement des connaissances antérieures (par enrichissements successifs) et la conduite d'une activité débouchant sur une nouvelle notion.
- Donner à chaque groupe de travail, une leçon pour laquelle les stagiaires :
  - concevront des exercices pour le contrôle des pré-requis;
  - construiront des activités de découverte à partir des objectifs pédagogiques.

Liste des leçons :

Niveau	***Leçon***
6^e	Introduction des nombres décimaux relatifs
5^e	- Symétrique de deux droites perpendiculaires par rapport à une droite - Produit de deux nombres décimaux relatifs
4^e	- Droite des milieux dans un triangle - Théorème de Pythagore
3e	- Angles inscrits dans un cercle - Propriété de Thalès

Consignes d'activités pour le stagiaire

- Dire pourquoi il est nécessaire de donner aux élèves des activités de découverte au cours d'une leçon de mathématiques ?
- Pour la leçon affectée au groupe :

  1°) Déterminer les objectifs pédagogiques de cette leçon.

  2°) Préciser pour chaque objectif les savoirs à mobiliser et les pré-requis à contrôler.

  3°) Pour chaque nouvelle notion :
    - préciser les pré-requis,
    - construire les exercices de contrôle de ces pré-requis.
    - construire une activité de découverte.

SYNTHESE DU FORMATEUR

✓ L’activité est un exercice permettant aux élèves de découvrir une nouvelle notion. Elle met en jeu un problème dont la résolution requiert des outils que sont les pré-requis (procédés, techniques, notions déjà acquis) afin d’aboutir à la découverte ou à l’assimilation de notions nouvelles. De ce fait, au lieu de subir l’enseignement (méthode dogmatique ou traditionnelle), les élèves participent à la construction des nouveaux savoirs (méthodes actives).
L’activité doit donc prendre en compte les objectifs pédagogiques visés et permettre un démarrage possible pour tous les élèves.

On ne peut plus donner des activités pour des notions déjà abordées dans la classe ou dans les classes antérieures

Pour élaborer une activité, il est plus indiqué de procéder de la façon suivante :

- partir de l’objectif pédagogique visé pour relever les savoirs mis en jeux,
- formuler l’essentiel à retenir
- identifier les pré-requis.

L’activité est alors l’exercice dont la résolution permettra aux élèves de déboucher sur l’essentiel à retenir.

✓ Pour toute nouvelle notion, il est impératif de faire d’abord le point sur l’état des connaissances nécessaires pour son apprentissage. Il s’agit donc des pré-requis qu’il faut contrôler par des exercices donnés aux élèves (*évaluation diagnostique*). La résolution de ces exercices permet alors à l’enseignant de se situer et prendre la décision d’aborder la nouvelle notion, lorsque ces connaissances sont en place, ou de reprendre la leçon sur ces pré-requis dans le cas contraire.
Il n’est donc pas question de reprendre systématiquement les notions déjà abordées mais de procéder à leur renforcement par enrichissements successifs.

Classe	Leçon	Objectifs pédagogiques	Savoirs	Pré-requis
Sixième	Introduction des nombres décimaux relatifs	Traduire des situations concrètes par des nombres relatifs (entiers ou décimaux)	- Nombres entiers, décimaux relatifs	- Somme et différence de deux nombres décimaux arithmétiques - Comparaison de nombres décimaux arithmétiques
		Reconnaitre un nombre décimal positif, négatif	- Nombres décimaux relatifs positifs, négatifs	
		Lire l'abscisse d'un point marqué sur une droite graduée	- Droite graduée à l'aide des nombres décimaux relatifs - Abscisse d'un point	-Demi-droite graduée à l'aide de nombres décimaux arithmétiques.
		Reconnaitre deux nombres décimaux opposés	Opposé d'un nombre décimal	
		Effectuer une addition de deux nombres décimaux relatifs	Somme de deux nombres décimaux relatifs	Toutes les notions antérieures sur les nombres décimaux relatifs
Cinquième	Produit de deux nombres décimaux relatifs	Donner le signe du produit de deux nombres décimaux relatifs	Multiplication de deux nombres décimaux	- Opposé d'un nombre décimal - Somme de deux nombres décimaux relatifs - Distance à zéro d'un nombre décimal relatif
		Calculer le produit de nombres décimaux relatifs	Règles de multiplication de deux nombres décimaux relatifs	
	Symétrique de deux droites perpendiculaires par rapport à une droite	Construire le symétrique de deux droites perpendiculaires par rapport à une droite	- Symétrique de deux droites perpendiculaires par rapport à une droite - Propriété	- Construction de droites perpendiculaires - Symétrique d'une droite par rapport à une droite - Symétrique d'un angle par
		Justifier, à l'aide des propriétés des figures		

		symétriques par rapport à une droite, que deux droites sont perpendiculaires		rapport à une droite
Quatrième	Droite des milieux dans un triangle	Utiliser la propriété directe de la droite des milieux pour démontrer que deux droites sont parallèles	- Propriété directe de la droite des milieux	- Milieu d'un segment - Droites parallèles - Triangle
		Calculer la longueur d'un segment	Longueur du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle.	
		Utiliser la réciproque de la propriété de la droite des milieux pour justifier qu'un point est milieu d'un segment	- Réciproque de la propriété de la droite des milieux	
	Propriété de Pythagore	- Calculer, en utilisant la propriété de Pythagore, la mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant celles de deux côtés	- Propriété de Pythagore	Triangle rectangle
		Démontrer qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque de la propriété de Pythagore	- Réciproque de la ppropriété de Pythagore	
		Calculer la longueur de la hauteur issue du sommet de l'angle droit connaissant la longueur des côtés du triangle rectangle	Propriété relative à la hauteur dans un triangle rectangle	
Troisième	Propriété de Thalès	Reconnaitre une configuration permettant d'utiliser la propriété directe Thalès	- Propriété directe de Thalès dans le triangle - Propriété de Thalès dans le	- Parallèle à une droite passant par un point donné. - Egalités de deux quotients
		Utiliser la propriété directe de Thalès pour :		

		- Construire une quatrième proportionnelle, - Partager un segment dans un rapport donné - Calculer une distance. - démontrer que des triangles sont semblables	cas général. - Propriété de Thalès et triangles semblables	- -Position des points sur une droite dans un ordre.
		Utiliser la propriété réciproque de Thalès pour démontrer un parallélisme de droites	Propriété réciproque de Thalès	
	Angles inscrits dans un cercle	Reconnaitre : - un angle inscrit, l'angle au centre aigu associé et l'arc intercepté, - des angles inscrits interceptant le même arc de cercle ou des arcs de même longueur	- Angle inscrit, angle au centre aigu associé, arc intercepté, - Angles inscrits interceptant le même arc de cercle ou des arcs de même longueur	- Angle au centre - Polygones réguliers
		Utiliser les propriétés des angles inscrits pour : - Justifier une égalité angulaire, - Déterminer la mesure d'un angle	- Propriétés des angles inscrits - Techniques de calculs et de démonstration	Angles inscrits

✓ **Exemples d'activités de découverte**

➢ **Classe de Sixième**

☞ **Leçon :** *Introduction des nombres décimaux relatifs*

- ***Objectifs pédagogiques*** **:**
  - Traduire des situations concrètes par des nombres relatifs (entiers ou décimaux)
  - Reconnaitre un nombre décimal positif, négatif

- **Contrôle des pré-requis**

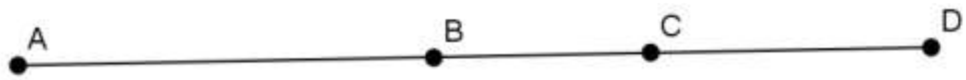
Utilisation de la règle : a + (b – c) = (a + b) – c   avec b > c.

Exercice 1 :

Awa achète à la librairie un sac d'écolier à 2300 F et un livre à 1700F. Le Libraire lui fait une remise de 350 F sur le prix du livre.

Calcule de deux façons différentes le prix total que Awa doit payer, en donnant pour chaque façon, l'écriture en ligne correspondante.

Exercice 2 :



AB = 4,7 , BD = 5,3 et CD = 3,5.

Calculer la longueur AC de deux façons différentes et pour chaque façon, écrire les calculs en une seule ligne.

- **Activités de découverte**

Activité 1 : Complète avec le nombre qui convient :

a) 7 +… = 10 ; b) 32 + ….. = 79 c) …+ 9,7 = 22,8 ; d) 9 + …. = 5

Activité 2 : En jouant à deux parties de billes dans la matinée et l'après-midi, Essofa a obtenu les résultats suivants :

1ère Partie	**2e partie**	**Opération résumant le bilan de la journée.**	**Bilan de la journée à l'aide d'un nombre**
Gagné 11 billes	Perdu 5 billes	11 – 5	Gain 6
Gagné 7 billes	Perdu 13 billes		
Perdu 3 billes	Gagné 10 billes		
Perdu 12 billes	Gagné 12 billes		
Perdu 12 billes	Gagné 9 billes		

Complète le tableau ci-dessus.

- **Essentiel à retenir**

✓ (+6), (– 6), (+7) , (–3) sont des nombres entiers relatifs.

(+6) et (+ 7) sont des nombres entiers relatifs positifs.

(– 6) et (–3) sont des nombres entiers relatifs négatifs.

L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

✓ (+6) ;(– 6) ; (+7) ; (–3) ; (– 14,07) ; sont des nombres décimaux relatifs.

(+6); (+ 7) et (+ 0,98) sont des nombres décimaux relatifs positifs.

(– 6); ; (–3) et (– 14,07) sont des nombres décimaux relatifs négatifs.

L'ensemble des nombres décimaux relatifs est noté ID.

✓ 0 est le seul nombre décimal relatif qui soit à la fois positif et négatif.

- ***Analyse a priori des activités***

Activité 1 :

⇨ Les élèves débuteront la résolution de a) en faisant recours au calcul mental.

⇨ A partir de la question b), ils feront recours à la soustraction à défaut du calcul mental.

⇨ A la question d), des élèves risquent de dire que ce n'est pas possible. En leur demandant de procéder comme aux questions b) et c), ils seront amenés à trouver que le nombre manquant est : **5 – 9**.

Le contrôle donne : 9 + (5 – 9) = (9+5) – 9 = 5.

⇨ *Le professeur fera remarquer aux élèves d'autres différences égales à 5 – 9 :*

5 – 9 = (1+4) – (1+8) = 4 – 8

= (2+3) – (2+7) = 3 – 7

= ……………. = 0 – 4

Il fait observer par les élèves que 5 – 9 , 3 – 7 , 2 – 6 , 1 – 5 , 0 – 4 sont différentes écritures d'un nouveau nombre désormais noté : **– 4 ou (–4)**

Le nombre 4 est encore noté + 4 ou (+ 4)

Activité 2 :

A partir de la première ligne ainsi renseignée et en s'appuyant sur l'activité 1, les élèves rempliront les lignes suivantes. Ce qui introduit également les nombres décimaux relatifs positifs, les nombres décimaux relatifs négatifs et l'opposé d'un nombre décimal relatif.

➢ **Classe de Cinquième**

Leçon 1 : *Produit de deux nombres décimaux relatifs*

- ***Objectifs pédagogiques*** **:**
  - Donner le signe du produit de deux nombres décimaux relatifs
  - Calculer le produit de deux nombres décimaux relatifs, de plusieurs nombres décimaux relatifs (de manière performante)

- **Contrôle des pré-requis**

1- Donner des nombres décimaux pour lesquels l'élève déterminera pour chacun son opposé.

2- Faire calculer des sommes de deux nombres décimaux.

3- Faire calculer la distance à zéro d'un nombre décimal relatif

4- Faire appliquer la règle de la distributivité : (a + b) x c = axc +bxc

- **Activités de découverte**

Activité 1 :

1- Ecris le produit 3 x 7 sous forme de somme du nombre 7,.

2- Utilise le même procédé pour calculer : (+3) x (+7) ; (+3) x (-7) .

3- a) Calcule ((-3) + (+3)) x (- 5) .

b) Ecris ((-3) + (+3)) x (- 5) comme somme de deux produits.

c) Compare (-3) x (- 5) et (+3) x (- 5) puis déduis la valeur du produit (-3) x (- 5)

Activité 2 : Recopie et complète le tableau suivant :

a	**B**	**axb**	**Signe de a**	**Signe de b**	**Signe de a xb**
(+2)	(+5)				
(-3)	(- 4)				
(+2)	(- 5)				
(-5)	(+2)				

- **Essentiel à retenir**

Règle

Pour multiplier deux nombres décimaux relatifs :

- on multiplie les distances à zéro de ces deux nombres,
- puis on détermine le signe de la façon suivante :
  - ✓ le produit de deux nombres décimaux relatifs de même signe est un nombre décimal relatif positif.

- ✓ le produit de deux nombres décimaux relatifs de signes contraires est un nombre décimal relatif négatif.

- ***Analyse a priori des activités***

Activité 1 :

- ⇨ La question 2- amène les élèves à étendre à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs le procédé de la multiplication dans lN à travers le calcul du produit de deux entiers relatifs positifs, de deux entiers relatifs de signes contraires.
- ⇨ La même règle ne pouvant pas être utilisée dans le cas du produit de deux entiers relatifs négatifs, la question 3- permet aux élèves de contourner la difficulté en appliquant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la définition de l'opposé d'un nombre entier relatif.

Activité 2 :

Elle fait établir la règle de détermination du signe du produit à partir des signes des facteurs.

Leçon 2 : *Symétrique de deux droites perpendiculaires par rapport à une droite*

- ***Objectifs pédagogiques* :**

- Construire le symétrique de deux droites perpendiculaires par rapport à une droite

- Justifier, à l'aide des propriétés des figures symétriques par rapport à une droite, que deux droites sont perpendiculaires

- **Contrôle des pré-requis**

Exercice1

Construis deux droites (AB) et (AC) perpendiculaires en A.

Exercice2

Construis un angle $\widehat{EFG}$ de mesure 40° et une droite (d) telle que E, F et G n'appartiennent pas à (d).

Construis le symétrique $\widehat{E'F'G'}$ de l'angle $\widehat{EFG}$ par rapport à (d).

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{E'F'G'}$. Justifie ta réponse.

Activité de découverte

(AB) et (AC) sont deux droites perpendiculaires en A, (D) une droite distincte de (AB) et de (AC) comme l'indique la figure ci-contre.

a- Reproduis la figure.
b- Construis les points A', B' et C'symétriques respectifs de A, B et C par rapport à (D).
c- Trace les droites (A'B') et (A'C'). Quelle est la position relative des droites (A'B') et (A'C') ?
d- Pour justifier ta réponse, réponds aux questions suivantes :
   - Quelle est la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$?
   - En déduire la mesure en degré de l'angle $\widehat{B'A'C'}$. Enonce la propriété utilisée.

- **Essentiel à retenir**

<u>Propriété</u> : Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs symétriques par rapport à une droite sont aussi perpendiculaires.

- ***Analyse a priori des activités***

A la question c-, certains élèves se contenteront de dire que les droites sont sécantes. Il reviendra au professeur de les amener au niveau de la question d) en rappelant la propriété sur le symétrique d'un angle par rapport à une droite.

➢ **Classe de Quatrième**

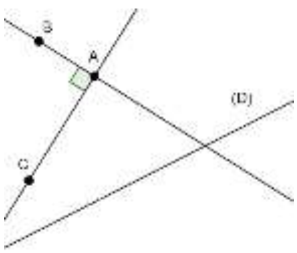
Leçon 1: *Droite des milieux dans un triangle*

- ***Objectifs pédagogiques*** **:**
  - Utiliser la propriété directe de la droite des milieux pour démontrer que deux droites sont parallèles
  - Calculer la longueur d'un segment

- **Contrôle des pré-requis**

1- Propriétés du parallélogramme.
2- Propriétés de la symétrie centrale

- **Activités de découverte**



Activité :

ABC est un triangle quelconque, B' et C'sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]. On désigne par E le symétrique de B' par rapport à C'

1- A partir de la figure :

   a) que peux-tu dire de la position relative des droites (B'C') et (BC) ?
   b) compare les distances B'C' et BC.

2- a) Justifie que le quadrilatère AECB' est un parallélogramme.

   b) Déduis alors la position relative des droites (EC) et (AB).

3- a) compare les distances EC et B'B.

   b) justifie que le quadrilatère (non croisé) EB'BC est un parallélogramme.

   c) déduis la position relative des droites (EB') et (BC).

- **Essentiel à retenir**

Propriété :

Dans un triangle :

- ✓ si une droite passe par les milieux de côtés, alors elle est parallèle au support du troisième côté ;
- ✓ la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté

- ***Analyse a priori des activités***

Activité :

- ⇨ La question 1- amène les élèves à émettre des conjectures. L'enseignant saura les orienter vers le résultat recherché.
- ⇨ Il s'agit pour eux d'établir la preuve à partir de la question 2- .

Leçon 2 *Propriété de Pythagore*

- ***Objectifs pédagogiques*** **:**

- Calculer, en utilisant la propriété de Pythagore, la mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant celle de deux côtés

- Démontrer qu'un triangle est rectangle en utilisant la réciproque de la propriété de Pythagore

- Calculer la longueur de la hauteur issue du sommet de l'angle droit connaissant la longueur des côtés du triangle rectangle

- **Contrôle de pré requis :**

Exercice 1

ABC est un triangle tel que CA = 3 cm et CB = 4cm.

a) Construis le triangle ABC dans les cas suivants :

1- AB = 9 cm 2- AB = 5 cm 3- AB = 7cm

b) Dans quel cas un triangle rectangle ?

Exercice 2

1/ Construis un triangle MPQ tel que MP= 5cm, PQ = 3cm et $mes\widehat{MPQ}$= 30 °.

2/ Construis les points M'et Q' symétriques des points M et Q par rapport au point P.

Justifie que les triangles MPQ et M'PQ' sont superposables.

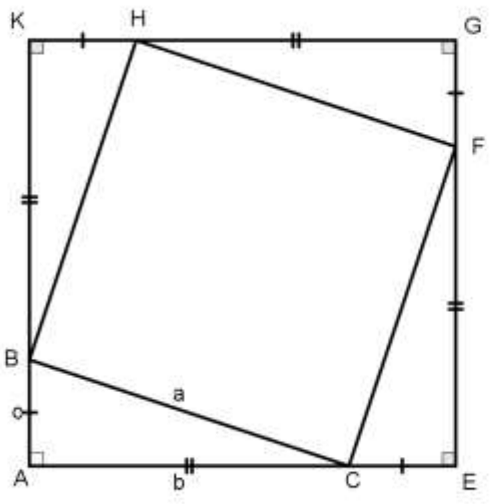
Activité de découverte 1:

ABC est un triangle tel que :AB = 3 cm et AC = 4 cm et BC = 5 cm

Compare BC^2 et $AB^2 + AC^2$ Que constates – tu ?

Activité de découverte 2:

ABC est un triangle rectangle en A. on considère la figure codée ci – dessous obtenue à partir du triangle ABC.



On veut démontrer que $a^2 = b^2+c^2$. Pour cela :

1. Démontre que BCFH est carré. A cet effet :
   a) justifie que les triangles ABC, ECF, GFH et KHB sont superposables.
   b) Justifie que le quadrilatère BCFH est un losange.
   c) Justifie que les angles $K\widehat{H}B$ et $G\widehat{H}F$ sont complémentaires.
   d) Déduis- en que :
   - l'angle $B\widehat{H}F$ est droit.
   - le losange BCFH est en fait un carré
2. a) Calcule de deux manières, l'aire du carré BCFH.

   b) Ecris cette égalité en utilisant les longueurs a, b et c. (a désigne la longueur de l'hypoténuse d'un triangle orange ; b et c désignent les longueurs des deux autres côtés.)

c) Recopie et complète la phrase suivante, appelée **propriété de Pythagore :**

Si un triangle est rectangle, alors le carré de … est égale à la somme des carrées des ...

- **Essentiel à retenir**

Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés

- **Analyse a priori**

Activité 1

Il s'agit de faire constater que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ lorsque le triangle ABC est rectangle en A à partir de la mesure de BC.

Activité 2

Cette activité démontre la conjecture obtenue à l'activité 1.

Pour établir que les triangles sont superposables à la question 1. a) , on peut utiliser la propriété suivante : Deux triangles ayant un même angle et les côtés adjacents deux à deux égaux sont superposables.

A la question 2. a), amener les élèves à constater que l'aire du carré BCFH est égale aussi à l'aire du grand carré AEGK diminuée de celles des quatre triangles superposables.

Classe de Troisième

Leçon 1: *Propriétés directe de Thalès*

- ***Objectifs pédagogiques* :**

❖ Utiliser la propriété directe de Thalès pour :
  - Construire une quatrième proportionnelle,
  - Calculer une distance.

❖ Utiliser la propriété réciproque de Thalès pour démontrer un parallélisme de droites

- **Contrôle des pré-requis**

Exercice 1 :

1- Construis un triangle ABC tel que $mes\,\widehat{ABC}$=120°.

2- Trace les hauteurs issues respectivement de B et de C ; on note h et k leurs mesures respectives.

1. Calcule de deux façons différentes l'aire du triangle ABC.

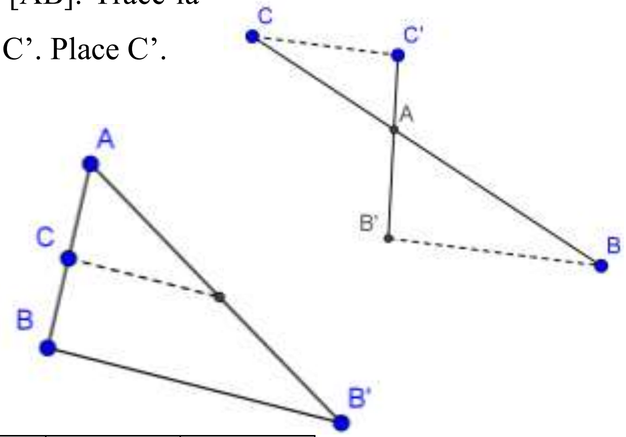
2. En déduire l'expression de $\frac{AC}{AB}$ en fonction de h et k.

○ *Propriété directe de Thalès*

▪ Activités de découverte

Activité 1 :

2. Trace un triangle ABB'. Place un point C sur [AB]. Trace la parallèle à (BB') passant par C, elle coupe [AB'] en C'. Place C'.
3. Utilise la règle graduée pour compléter le tableau suivant :



AB	AC	AB'	AC'	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC'}{AB'}$

4. Compare $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{AC'}{AB'}$

Activité 2 : (suite de l'activité1)

On cherche à démontrer l'égalité : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$

a- Trace la hauteur issue de B dans le triangle BCC' et la hauteur issue de B' dans le triangle B'CC'.

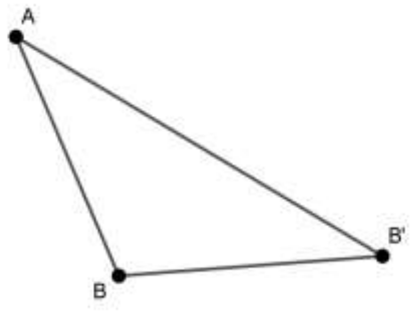
Justifie que aire (BCC') = aire (B'CC').

b- Déduis-en que aire (ABC') = aire (AB'C).

c- Utilise la hauteur issue de C' dans les triangles ABC' et ACC' pour montrer que : $\frac{AC}{AB} = \frac{aire\ (ACC')}{aire\ (ABC')}$.

d- Utilise un raisonnement analogue à partir des triangles ACC’ et AB’C pour montrer que : $\frac{AC'}{AB'} = \frac{aire\ (ACC')}{aire\ (AB'C')}$.

e- Justifie enfin que : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$



- **Essentiel à retenir**

Propriété de Thalès dans le triangle

- <u>Propriété directe</u>

Propriété :

ABB’ est un triangle. C est un point de (AB),

C’ est un point de (AB’).

Si les droites (BB’) et (CC’) sont parallèles, alors $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$.

- *Propriété réciproque de Thalès*

- **Activités de découverte**

<u>Activité 3</u> :

La figure ci-contre est un triangle ABB’ tel que AB = 3cm et AB’= 4,5cm. Place le point C sur [AB] tel que AC = 2cm.

Soit C’ le point de(AB’) tel que AC’ = 3cm.

1. Calcule et compare $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{AC'}{AB'}$

2. Reproduis deux fois la figure et place le point C’ en considérant les deux cas :
   - C’ appartient à [AB’]
   - C’ n’appartient pas à [AB’]

c) Dans quel cas on a : (BB’) // (CC’) ? Que dire de l’ordre d’alignement dans lequel se trouvent les points A, C ,B d’une part et A, C’, B’ d’autre part ?

- **Essentiel à retenir**

Propriété réciproque de Thalès

Propriété :

ABB’ est un triangle. C est un point de (AB), C’ est un point de (AB’) tels que la position de C par rapport à A et B soit la même que celle de C’ par rapport à A et B’ (autrement dit les points A, C et B sont alignés dans le même ordre que les points A, C’ et B’).

Si $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$, alors les droites (BB’) et (CC’) sont parallèles.

- ***Analyse a priori des activités***

Activité 1 :

- ⇨ Cette activité va permettre à chaque élève de faire la conjecture à propos de l'égalité des rapports ; ce qu'il tentera de démontrer dans l'activité suivante.
- ⇨ Le professeur veillera à ne pas trainer sur cette activité ; il expliquera progressivement la démarche aux élèves (mesure, remplissage, calcul de rapports, établissement de l'égalité)

Activité 2 :

- ⇨ La recherche et la rédaction de la solution se feront question, par question ; le professeur n'hésitera pas de recourir aux prérequis pour faire progresser les échanges.
- ⇨ Pour la question a), on utilisera le parallélisme des droites (BB') et (CC')pour justifier l'égalité des hauteurs.
- ⇨ L'égalité de b) peut s'établir en exprimant chaque membre en somme d'aires : aire (ABC') = aire (ACC') + aire (CBC') ; aire (AB'C) = aire (ACC') + aire (CB'C') et en recourant à l'égalité précédente.
- ⇨ Pour la question d), il suffit de procéder par analogie en considérant les triangles AB'C et ACC' et les hauteurs issues de C.

Activité 3 :

- ⇨ Tout comme dans l'activité1, celle-ci va permettre à chaque élève de faire la conjecture à propos du parallélisme de droites.
- ⇨ L'enseignant amènera les élèves à reconnaitre l'unique position relative des points alignés qui convient à la conclusion sur le parallélisme de droites.

Leçon 2: *Angles inscrits dans un cercle*

- ***Objectifs pédagogiques* :**

- Reconnaitre :
  - o un angle inscrit, l'angle au centre aigu associé et l'arc intercepté,
  - o des angles inscrits interceptant le même arc de cercle ou des arcs de même longueur

- Utiliser les propriétés des angles inscrits pour :
  - o Justifier une égalité angulaire,
  - o Déterminer la mesure d'un angle

- **Contrôle des pré-requis**

Angle au centre, arc intercepté par un angle au centre.

e) Ecris une relation entre B’C’ etBC.

- **Essentiel à retenir**

Propriété :

Dans un triangle :

- ✓ si une droite passe par les milieux de côtés, alors elle est parallèle au support du troisième côté ;
- ✓ la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté

- ***Analyse a priori des activités***

Activité :

- ⇨ La question 1- amène les élèves à émettre des conjectures. L’enseignant saura les orienter vers le résultat recherché.
- ⇨ Il s’agit pour eux d’établir la preuve à partir de la question 2- .

➢ **Classe de Troisième**

☞ **Leçon:** *Angles inscrits dans un cercle*

- ***Objectifs pédagogiques*** **:**

- Reconnaitre :

  - o un angle inscrit, l’angle au centre aigu associé et l’arc intercepté,
  - o des angles inscrits interceptant le même arc de cercle ou des arcs de même longueur

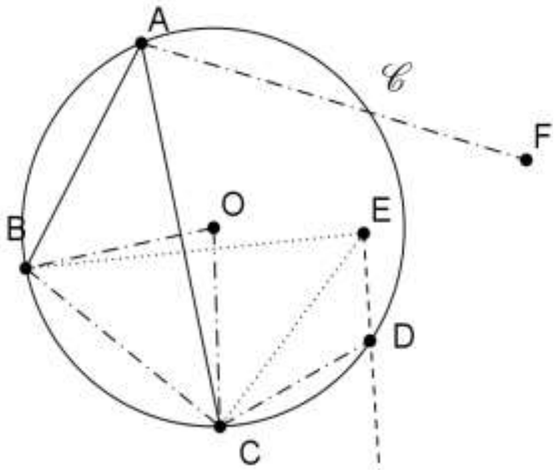
- Utiliser les propriétés des angles inscrits pour :

  - o Justifier une égalité angulaire,
  - o Déterminer la mesure d’un angle

- **Contrôle des pré-requis**

Angle au centre, arc intercepté par un angle au centre.

- **Activités de découverte**



Activité 1:

Les points A, B et C appartiennent au cercle (C) : on dit que l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans le cercle (C).

1- Parmi les angles suivants : $\widehat{BCA}$,$\widehat{BOC}$, $\widehat{CAF}$, $\widehat{DEC}$, $\widehat{OCB}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CFB}$, lesquels sont des angles inscrits dans le cercle (C) ?

2- Pour chacun des angles inscrits, précise l'angle au centre associé et l'arc intercepté.

Activité 2 :

I/ $\widehat{AMB}$ est un angle aigu inscrit dans un cercle (C) de centre O tel que A et M sont diamétralement opposés.

1- Quelle est la nature du triangle BOM ?

Déduis-en que : $mes\ \widehat{BOM} = 180° - 2 \times mes\ \widehat{AMB}$

3- Ecris une relation entre les mesures de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ .et de l'angle au centre associé $\widehat{AOB}$.

II/ $\widehat{AMB}$ est un angle aigu inscrit dans le cercle (C) de centre O tel que O n'appartienne ni à [AM], ni à [BM] . Soit M' est le point diamétralement opposé à M.

1- Premier cas : O est situé à l'intérieur du triangle AMB

a) En utilisant les résultats du I/, compare $mes\ \widehat{AMM'}\ et\ mes\ \widehat{AOM'}$ puis $mes\ \widehat{BMM'}\ et\ mes\ \widehat{BOM'}$.

b) Déduis-en une relation entre $mes\ \widehat{AMB}\ et\ mes\ \widehat{AOB}$.

Montre que : $mes\ \widehat{AOM'} + mes\ \widehat{M'OB} = 360° - mes\ \widehat{AOB}$

2- Deuxième cas : O est situé à l'extérieur du triangle AMB

a) En utilisant les résultats du I/, compare $mes\ \widehat{AMM'}\ et\ mes\ \widehat{AOM'}$ puis $\widehat{BMM'}\ et\ mes\ \widehat{BOM'}$.

b) Déduis-en une relation entre $mes\ \widehat{AMB}\ et\ mes\ \widehat{AOB}$.

III/ $\widehat{AMB}$ est un angle obtus inscrit dans le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O. M’ est le point diamétralement opposé à M.

3- Montre que : $mes\ \widehat{AOM'} + mes\ \widehat{M'OB} = 360° - mes\ \widehat{AOB}$

4- Utilise les résultats du I/ pour trouver une relation entre $mes\ \widehat{AMM'}\ et\ mes\ \widehat{AOM'}$ puis entre $mes\ \widehat{AMM'}\ et\ mes\ \widehat{AOM'}$.

5- Déduis-en une relation $mes\ \widehat{AMB}\ et\ mes\ \widehat{AOB}$

- **Essentiel à retenir**

  - Définition :

– Si A, B et M sont trois points distincts d’un cercle (de centre O) , on dit que l’angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans ce cercle.

– L’angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre associé à l’angle inscrit $\widehat{AMB}$;

– L’arc de cercle AB est l’arc intercepté par l’angle inscrit $\widehat{AMB}$.

  - Propriété :

– Un angle inscrit aigu a pour mesure la moitié de la mesure de l’angle au centre associé : $mes\ \widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$.

– Un angle inscrit obtus a pour mesure 180° diminué de la moitié de la mesure de l’angle au centre associé : $mes\ \widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$.

- ***Analyse a priori des activités***

Activité 1 :

Question 1 : Certains élèves peuvent considérer que l’angle $\widehat{CAF}$ n’est pas un angle inscrit. Le professeur leur demandera de renommer l’angle en remplaçant le point F par le point d’intersection K du segment [AF] et du cercle ($\mathcal{C}$) .

Idem pour l’angle $\widehat{OCB}$.

Activité 2:

I/ Relation entre mesures de l’angle aigu inscrit $\widehat{AMB}$ et de l’angle au centre $\widehat{AOB}$ dans le cas simple où le centre O du cercle appartient à l’un des segments [AM] et [BM].

II/ et III/ : soit l'angle $\widehat{AMB}$ est scindé en deux angles adjacents $\widehat{AMM'}$ et $\widehat{M'MB}$; soit l'angle $\widehat{AMM'}$ est scindé en deux angles adjacents $\widehat{AMB'}$et $\widehat{BMM'}$.

Message pédagogique

Un problème dont la résolution ne débouche pas sur une nouvelle notion n'est pas une activité de découverte pour les élèves.

SEANCE 2 (3 heures) : **Conception d'exercices de renforcement des connaissances**

Consignes pour le formateur

- Poursuivre avec les stagiaires la clarification des notions entamée à la séance 1 de la séquence 1 de l'UF2, en faisant distinguer les contenus et moments appelant à une activité de découverte ou à un renforcement de connaissances.
- Donner à chaque groupe, une leçon pour laquelle les stagiaires concevront dans le cas échéant des exercices de renforcement de connaissances.

Liste des leçons :

Niveau	*Leçon*
6^{e}	Somme et produit de nombres décimaux (arithmétiques)
5^{e}	- Somme de nombres décimaux relatifs - Figures symétriques : utilisation des propriétés de conservation (alignement, distances et mesures d'angles) pour calculer et justifier
4^{e}	- PPCM et PGCD - Problèmes de proportionnalité
3e	- Calcul littéral - Equations du premier degré - Statistiques

Consignes d'activités pour le stagiaire

- Après avoir rappelé les objectifs pédagogiques visés par la leçon, préciser si ceux-ci renvoient à la découverte de nouvelles notions ou à des renforcements de connaissances.
- Dans les cas de renforcement de connaissances, construisez des exercices de renforcement.

SYNTHESE DU FORMATEUR

Les contenus prévus au programme d'une classe donnent lieu :

- soit à de nouvelles notions dont l'apprentissage se fait à travers une activité de découverte,
- soit à un prolongement de la classe antérieure qui nécessite un renforcement de connaissances.

Ainsi, un renforcement de connaissances ou consolidation se fait sur des contenus au programme de la classe et qui de ce fait doivent être exécutés. Alors que les pré-requis sont des ressources installées et qui sont nécessaires à l'apprentissage de la nouvelle notion.
Dans le cas du renforcement de connaissances ou consolidation, l'enseignant, pour ce faire, s'appuie sur le niveau atteint dans la classe antérieure et procède par enrichissement successifs.

Classe	Leçon	Objectifs pédagogiques	Stratégie envisagée
Sixième	Opérations sur les nombres décimaux (arithmétiques)	Calculer la somme ou la différence de nombres décimaux	*Renforcement des acquis du cours primaire*
		Calculer le produit de nombres décimaux	
		Employer correctement le vocabulaire : - somme, différence, addition, soustraction, terme - produit, facteur, multiplication	Découverte et utilisation du vocabulaire adéquat
Cinquième	Somme de nombres décimaux relatifs	Calculer la somme de nombres décimaux	- *Renforcement des acquis de la classe de 6^{e}* - Découverte des règles de la somme de deux nombres décimaux relatifs
	Figures symétriques : utilisation des propriétés de conservation (alignement, distances et mesures d'angles) pour calculer et justifier	Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un angle, d'un triangle, d'un cercle par rapport à un point, par rapport à une droite	*Renforcement des acquis de la classe de 6^{e}*
		Reconnaître une configuration admettant un axe (ou un centre) de symétrie et préciser cet axe (ce centre)	
		Utiliser les propriétés de conservation (de l'alignement, des distances et des mesures d'angles) pour calculer et justifier	
Quatrième	PPCM et PGCD	Trouver le PPCM, le PGCD de deux nombres entiers naturels	- *Renforcement des acquis de la classe de 5^{e} (décomposition en produit de facteurs premiers, calcul du PPCM, fractions irréductibles et PGCD)* - Découverte de la règle de calcul du PGCD à partir de la décomposition en produit de facteurs premiers
		Utiliser le PPCM, le PGCD pour : - Résoudre des problèmes simples - Calculer sur des fractions	Utilisation du PPCM et du PGCD : - Résolution de problèmes - Simplification de fractions, réduction au même dénominateur
	Problèmes de proportionnalité	Reconnaître une situation de proportionnalité dans un problème concret et savoir l'exploiter (vitesse, débit)	*Renforcement des acquis des classes antérieures*

		Déterminer les coefficients d'un tableau de proportionnalité	*Renforcement des acquis des classes antérieures*
		Compléter un tableau de proportionnalité en utilisant : - les propriétés déjà vues - la propriété des proportions	Découverte de la propriété des proportions
Troisième	Calcul littéral	Utiliser les produits remarquables et les propriétés sur les nombres réels pour : - développer et réduire un polynôme - factoriser un polynôme	- *Renforcement des acquis de la classe de 4^e sur les expressions algébriques* - Découverte des monômes et polynômes (définition, degré)
		Déterminer la condition d'existence d'une valeur numérique d'une fraction rationnelle	Découverte de la notion de condition d'existence
		Simplifier une fraction rationnelle dans des cas simples	Extension de la notion de simplification des fractions
		Utiliser les expressions simplifiées pour : - le calcul de valeurs numériques - la résolution d'équations	- Calcul de valeurs numériques - Résolutions d'équations
	Equations du premier degré dans IR	Résoudre une équation du premier degré dans IR	- *Renforcement des acquis de la classe de 4^e*
		Résoudre une équation se ramenant du premier degré dans IR	Découverte des méthodes de résolution d'équations de type : $(ax+b)(cx+d)=0$
		Mettre en équation (du 1^{er} degré) un problème et le résoudre	Mise en équation et résolution de problèmes
	Statistiques	Regrouper une population en classes d'égale amplitude	Découverte du regroupement en classe
		Déterminer les effectifs, les fréquences des classes	Prolongement du calcul d'effectif, de fréquence
		Interpréter un histogramme (comparaison des effectifs)	Construction et interprétation d'un histogramme

✓ EXEMPLES D’EXERCICES DE RENFORCEMENT DE CONNAISSANCES

Classe de 5e

Somme de nombres décimaux relatifs

L’introduction des nombres décimaux relatifs est faite en classe de 6^e et les élèves ont débuté l’entrainement au calcul de la somme de nombres décimaux relatifs sans formalisation d’aucune règle. L’objectif de la classe de 5^e est la consolidation de cette opération avec la mise des règles de calcul avant l’introduction de la soustraction et du produit de deux nombres décimaux relatifs.

Exercice 1 (*calculs de sommes de deux nombres décimaux relatifs*)

Calcule :

1/ (+5) + (+12) 2/ (-7,5) + (+21,8) 3/ (+12) + (-32,5) 4 / (-32,4) + (-9,6)

Exercice 2 (*utilisation des regroupements*)

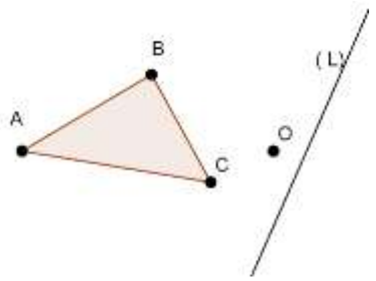
Effectue les additions suivantes :

1/ (+11) + (-15) + (+9) 2/ (-21,53) + (-7,87) + (+90) + (-3,26)

3/ (-32) + (+12,71) + (-9,65) + (-12,71)

Figures symétriques : utilisation des propriétés de conservation (alignement, distances et mesures d’angles) pour calculer et justifier

En classe de 6^e les élèves ont commencé par construire les symétriques de figures simples. Ils ont également découvert les propriétés de conservation de l’alignement, de la distance et de la mesure d’angle.



En classe de 5^e, il faut faire le point sur la maitrise des constructions et faire utiliser les propriétés pour calculer et justifier, avant de faire découvrir les propriétés de conservation du milieu, du parallélisme et de l’orthogonalité.

Exercice 1 (*construction de symétriques de points et de figures*)

1/ Reproduis la figure ci-contre et construis les symétriques par rapport au point O

a) des points A et B,

b) du triangle ABC,

c) du cercle (C) de centre C et de rayon CB

2/ Construis les symétriques par rapport à la droite (L) :

a) des points A et B,

b) du triangle ABC,

c) du cercle (C) de centre C et de rayon CB

Exercice 2 (*Utilisation des propriétés de conservation de l'alignement, de la distance et de la mesure d'angle*)

I-

1/ a) Marque sur une droite (m) trois points E, F et G.

b) Marque un point K hors de la droite (m).

2/ a) Construis les symétriques E', F' et G' des points E, F et G par rapport au point K.

b) Que peux-tu dire des points E', F' et G'.

c) Trace le symétrique (m') de la droite (m) par rapport au point K.

d) Compare les mesures des angles $\widehat{EFK}$ et $\widehat{E'F'K}$. Justifie ta réponse.

II-

1/ a) Construis un triangle ABC tel que $AB = 5cm$, $AC = 6cm$ et $BC = 8cm$.

b) Trace une droite (d).

2/ a) Construis le symétrique A'B'C' du triangle ABC par rapport à (d) .

b) Quel est le périmètre du triangle A'B'C' ?

Classe de 4e

PPCM et PGCD

Exercice (*Décomposition en produit de facteurs premiers, calcul et utilisation du PPCM, détermination du PGCD*)

1/ Décomposer les nombres 280 et 504 en produit de facteurs premiers.

2/ Déterminer le PPCM de 280 et 504 ; utilise le pour calculer la somme : $\frac{1}{280} + \frac{11}{504}$.

3/ a) Simplifie la fraction $\frac{504}{280}$ pour la rendre irréductible.

b) Quel le PGCD de 280 et 504 ?

SEANCE 3 (3 heures) : **Elaboration d'une fiche pédagogique de leçon**

Consignes pour le formateur

- Les éléments constitutifs composant l'ossature d'une fiche pédagogique ont été présentés à la Séance 1 de la Séquence 2 de l'UF1 (DIDACTIQUES DES MATHEMATIQUES). Il s'agit dans cette séance d'élaborer la fiche avec le contenu de chaque rubrique
- Pour les travaux de groupe il faudra donner à chaque groupe de travail, une leçon pour laquelle les stagiaires élaboreront la fiche pédagogique :

Liste des leçons :

Niveau	*Leçon*
6^{e}	Figures symétriques
5^{e}	Angles formés par deux droites parallèles et une sécante
4^{e}	Translation et vecteurs
3e	Equations de droites

Consignes d'activités pour le stagiaire

Elaborer la fiche pédagogique pour la leçon affectée à votre groupe.

SYNTHESE DU FORMATEUR

- **Titre de la leçon** : **Angles formés par deux droites et une sécante**

Durée : 55 min

- **Objectifs pédagogiques** :

  A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de :

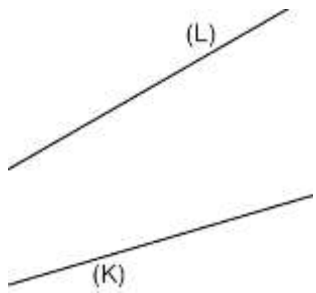
* **reconnaître dans une configuration :**

  - des angles alternes-internes
  - des angles alternes-externes
  - des angles correspondants.

- **Intentions pédagogiques**

- **Documents**
  - Mathématiques 5e CIAM
  - Mathématiques 5e Collection CARGO
  - Mathématiques 5e Collection NATHAN
  - Mathématiques 5e Collection Prisme
  - Programme de mathématiques HPM
  - Guides pédagogiques .

- **Matériels :**
  - Ensemble de géométrie
  - Une ardoise
  - Craies blanches et craies de couleurs



- **Pré-requis**
  - Points situés de part et d'autre, du même côté d'une droite donnée
  - Points situés à l'intérieur, à l'extérieur d'une bande délimitée par deux droites
  -

- **Contrôle des pré-requis**

1- Points situés de part et d'autre, du même côté d'une droite donnée

   a)Trace une droite (D).

   b) Marque deux points A et B de part et d'autre de (D).

   c) Marque un point C situé du même côté de la droite (D) que le point B.

2- Points situés à l'intérieur, à l'extérieur d'une bande délimitée par deux droites

La figure suivante représente une bande formée par deux droites (L) et (K).

Marque :

a) un point N à l'intérieur de la bande ;

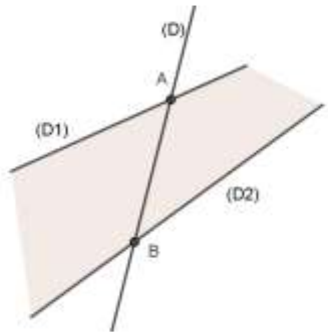
b) un point M à l'extérieur de la bande

- **Motivation**

- **Activités de découverte**

***Activités n°1**

Reproduis la figure et :



1- Marque à l'intérieur de la bande deux angles, l'un de sommet A et l'autre de sommet B, situés de part et d'autre de la droite (D).
2- Marque à l'extérieur de la bande deux angles, l'un de sommet A et l'autre de sommet B, situés de part et d'autre de la droite (D).
3- Marque du même côté de la droite (D) deux angles, l'un de sommet A situé à l'extérieur de la bande et l'autre de sommet B situé à l'intérieur.

- **Essentiel à retenir**

Deux angles formés par deux droites coupées par une sécante sont :

- **Alternes-internes** lorsqu'ils
  - n'ont pas le même sommet ;
  - sont à l'intérieur de la bande formée par les deux droites et de part et d'autre de la sécante.
- **Alternes-externes** lorsqu'ils
  - n'ont pas le même sommet ;
  - sont à l'extérieur de la bande formée par les deux droites et de part et d'autre de la sécante.
- **Angles correspondants** lorsqu'ils
  - n'ont pas le même sommet ;
  - sont du même côté de la sécante, l'un situé à l'extérieur de la bande et l'autre à l'intérieur.

- **Exercice d'application**

Sur la figure ci-contre, les droites (IJ) et (MN) ne sont pas parallèles.

1/ Que représentent les couples d'angles : $\widehat{POI}$ et $\widehat{POJ}$, $\widehat{POJ}$ et $\widehat{MOI}$?

Devoir de maison

Dans la figure ci-contre, les droites (XY) et (UV) sont parallèles.

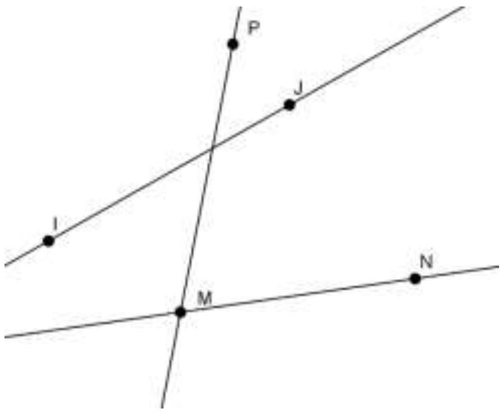
Nomme sur la figure :

1/ Deux angles correspondants.

2/ Deux angles alternes – internes

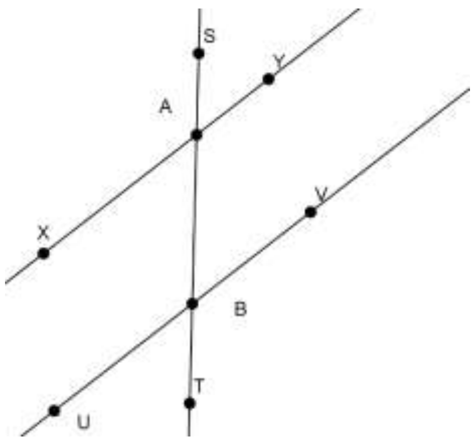
3/ Deux angles alternes – externes.

SEANCE 4 (2 heures) : Simulation de la leçon à partir de la fiche élaborée



Consignes pour le formateur

- Demander à un stagiaire de simuler un cours à partir de la fiche élaborée dans son groupe devant ses collègues ;
- Organiser un débat après le cours ;
- Faire la synthèse.



Consignes d'activités pour le stagiaire

- A partir de la fiche élaborée par ton groupe, simule un cours de 55 min devant tes collègues ;
- Réponds aux questions de tes collègues à la fin de ton cours.

SEQUENCE 2 : APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT ET DE LA DEMONSTRATION AU COLLEGE

Problématique

Les élèves du secondaire 1 éprouvent des difficultés dans la réalisation d'un discours démonstratif. Ils rencontrent des problèmes au **démarrage** (*lecture de l'énoncé pour faire l'inventaire des informations, faire une figure codée, identifier la conclusion*), dans **la recherche d'une démarche** (*qui, à partir des données, permet de répondre à la question posée en utilisant les propriétés et les définitions*) tout comme **dans la rédaction de la solution**. Les élèves des classes de 4^{e} ont tout simplement des problèmes pour suivre le cadre d'un raisonnement déductif *(hypothèses ou prémisses ou données, théorème ou propriétés ou énoncé tiers, conclusion).* A cela s'ajoute la non maîtrise de la langue de communication.
Cette séquence a pour objectif d'amener l'enseignant à inscrire l'apprentissage de la démonstration dans la progressivité, tout au long de l'année scolaire et tout au long du cycle.

Séance1 (2 heures) : Généralités sur le raisonnement et la démonstration

Consignes pour le formateur

Amener les stagiaires à :

- clarifier les concepts de raisonnement, démonstration et argumentation,
- donner les différents types de raisonnements mathématiques.

Consignes du Stagiaire :

- Quelles différences faites-vous entre raisonnement, démonstration et argumentation ?
- Quels sont les types de raisonnements que l'on peut rencontrer au collège ?

Synthèse du formateur :

La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration.

✓ **Raisonnement, démonstration et argumentation**

- Le **raisonnemen**t est **:**

- une activité de l'esprit qui passe, selon des principes déterminés, d'un jugement à un autre, pour aboutir à une conclusion. (Le Robert)

- une opération mentale fondée sur une logique de la pensée qui permet à l'individu de construire une conclusion à partir d'éléments divers de connaissance. Le raisonnement est selon Leibniz « une combinatoire qui met en jeu des opérations : conjonction, disjonction, négation, implication, incompatibilité, alternative ».

Les deux caractéristiques suivantes sont nécessaires pour qu'un discours puisse être reconnu comme un raisonnement :

- être orienté vers un énoncé-cible, c'est-à-dire vers la proposition à justifier ;
- être centré sur la valeur, logique ou épistémique (degré de crédibilité aux yeux du sujet : évidente, absurde, vraisemblable, nécessaire, possible, neutre. . .) de cette proposition et non pas sur son contenu.

- Une **démonstration** (mathématique) est un raisonnement qui consiste en un enchaînement de pas de déduction ou inférences, chacune de structure ternaire, et où les propositions combinées prennent l'un parmi trois statuts opératoires possibles : — propositions d'entrée (hypothèse) ou prémisses ; — règle d'inférence (axiome, définition ou théorème) ou énoncé-tiers ; — proposition inférée ou conclusion.

- **L'argumentation** est un raisonnement destiné à prouver un fait ou à défendre une opinion. C'est un discours destiné à convaincre de la validité d'un propos ; elle prend en compte un interlocuteu**r** (réel ou fictif) dont elle veut obtenir l'adhésion.

✓ **Distinction entre raisonnement, démonstration et argumentation**

Le **raisonnement** est constitué de la recherche, de la découverte et de la production d'une preuve.

La **démonstration** formalisée est la forme aboutie structurée sous forme déductive et rédigée de ce raisonnement.

L'**argumentatio**n a pour objet de changer l'opinion de l'individu auquel elle s'adresse alors que dans la **démonstration**, il s'agit de s'assurer qu'un résultat est bien la conséquence de théorèmes déjà connus. Contrairement à l'argumentation, la vérité démontrée a pour vocation d'être reconnue universellement.

<u>Sens des termes utilisés dans le manuels CIAM</u>

Le livre C.I.A.M emploie en 6^{e} et 5^{e} le terme « justifier » au sens de démontrer, c'est-à-dire que l'on attend de l'élève qu'il apporte une preuve à chaque pas de son raisonnement déductif à l'aide d'une définition, d'une propriété, d'une règle ou d'un mot de vocabulaire.
A partir de la classe de 4^{e}, C.I.A.M emploie systématiquement le terme démontrer.
Le terme « expliquer »est employé lorsqu'une justification n'est pas exigée, soit parce que l'élève n'a pas de bagage nécessaire pour démontrer, soit parce que cette justification est jugée difficile. Néanmoins son emploie veut dire que l'on attend que l'élève argumente de façon à conclure. On rencontrera souvent et surtout en 5^{e}, le terme « expliquer pourquoi… »
On emploie « vérifier que… ». Lorsqu'on veut se convaincre d'un résultat en utilisant des instruments (mesurer des segments, des distances, des angles, contrôler le parallélisme de droites, ou contrôler que deux droites sont perpendiculaires ; son emploie sera de moins en moins fréquent de la 6^{e} à la 3^{e} au fur et à mesure que les connaissances nécessaires pour justifier seront mises en place.

✓ Les types de raisonnement

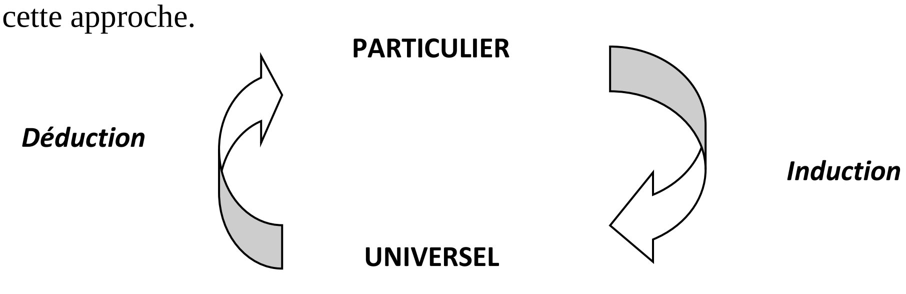
Deux types de raisonnement sont couramment mis en jeu au collège : *le raisonnement déductif et le raisonnement inductif.*

▪ Le raisonnement déductif

La déduction est un raisonnement qui consiste à tirer à partir d'une ou de plusieurs propositions, une autre qui en est la conséquence nécessaire.
C'est extraire du particulier à partir de l'universel. (à partir de la « propriété réciproque de Pythagore (universel) » tirer qu' « un triangle particulier est rectangle ».

▪ Le raisonnement inductif

L'induction est un type de raisonnement qui consiste à généraliser des cas particuliers.
D'un phénomène observé de manière répétitive, on va induire une loi générale, sans vérifier tous les exemples. L'induction extrait l'universel du particulier.
En mathématiques : l'induction est utilisée quand il s'agit de faire émerger une conjecture après avoir traité des exemples. L'utilisation des logiciels de géométrie dynamique est sous tendue par cette approche.



- **Le Raisonnement abductif** est une autre forme de raisonnement ; il s'agit d'un **processus** permettant d'expliquer un phénomène ou une observation à partir de certains faits, événement ou lois. Elle consiste, lorsque l'on observe un fait dont on connaît une cause possible, à conclure à titre d'hypothèse que le fait est probablement dû à cette cause-ci.

Le raisonnement *hypothético-déductif* est une forme d'abduction : *partir des hypothèses pour aboutir à la conclusion par le biais de l'énoncé tiers*.

En mathématiques, pendant la phase de recherche d'un problème, les élèves sont sollicités pour formuler des hypothèses (conjectures).

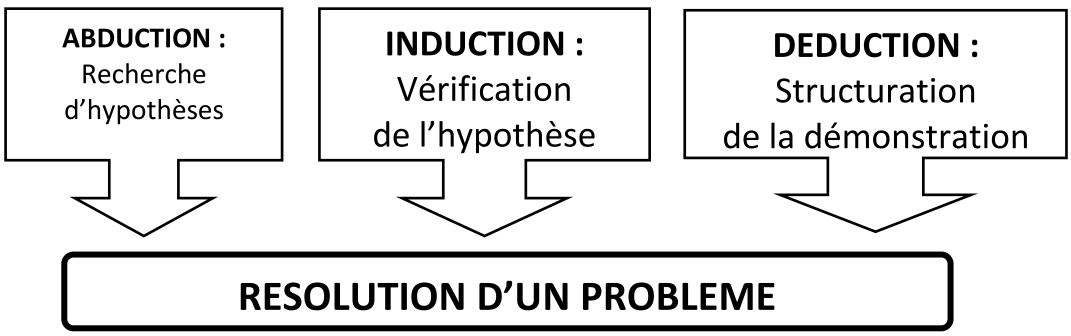
- **Autres types de raisonnements rencontrés en mathématiques**

  - **Raisonnement par contraposée** : Pour établir que « $P \Longrightarrow Q$ », on démontre « $non\ Q \Longrightarrow non\ P$ »
  - **Raisonnement par production d'un contre-exemple** :
  - **Raisonnement par disjonction de cas** : Pour montrer une propriété par disjonction des cas, on la prouve dans un nombre fini de cas, ces cas couvrant tous les cas possibles. (Démonstration de la propriété des angles inscrits)

- **Raisonnement par l'absurde** : ce raisonnement consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, puis par des déductions logiques (utilisant l'hypothèse) à aboutir à une absurdité. (Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en Seconde).

DEMARCHE DE RECHERCHE D'UNE DEMONSTRATION

Dans la recherche d'une démonstration, visant à répondre à une question ou à résoudre un problème ouvert, les trois types de raisonnements interviennent :



Séance2 (3 heures) : Apprentissage du raisonnement et de la démonstration au cycle d'observation

Consignes pour le formateur

- Prévenir les participants pour qu'ils apportent avec eux les manuels, les guides pédagogiques et le programme.
- Prévenir les participants pour qu'ils fabriquent des étiquettes rectangulaires et pentagonales en carton et qu'ils se munissent de marqueurs de différentes couleurs et de l'ensemble géométrique.
- Si possible, le formateur devra prévoir le même matériel et en plus de l'outil informatique avec logiciel de géométrie (cabri géomètre, Géogébra, ou autre) ou à défaut, le matériel collectif de géométrie (pour permettre à partir des figures de faire des conjectures).
- Engager les stagiaires dans une évaluation de l'apprentissage de la démonstration au cycle d'observation
- Faire concevoir par les stagiaires des stratégies d'aide aux élèves dans la recherche et la production des preuves.

Consignes du Stagiaire :

- Traiter les exercices proposés au sein de votre groupe.
- Faire la restitution

Exercice 1 :

Dans l'expression n × n – n + 11, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs (un nombre premier) ?

- Imaginer les réponses des élèves du collège.
- Dégager les règles de débats mathématiques liés à cet exercice.

Exercice 2 :

Construis un triangle ABC tel que AB = 15 cm, AC = 10 cm, BC = 13 cm. Place le milieu M de [AB] et trace la médiane [CM]. Des deux triangles AMC et CMB, quel est celui qui a la plus grande aire ?

- Imaginer les réponses des élèves du collège.
- Dégager les règles de débats mathématiques liés à cet exercice.

Exercice 3 :

- **Relever les difficultés qu'éprouvent les élèves dans l'apprentissage de la démonstration au collège et l'origine de ces difficultés.**
- **Quelles stratégies mettez-vous en place dans vos classes pour aider vos élèves à la recherche et à la production des preuves ?**

Synthèse du formateur

Exercice 1

Les élèves de ce niveau vont faire les calculs en donnant à n des valeurs successives.

n = 0, on obtient : 11, un nombre premier.

n = 1, on obtient : 11, un nombre premier.

n = 2, on obtient : 13, un nombre premier.

Certains élèves concluent qu'on obtient un nombre premier.

Ceux qui sont plus endurants, compte tenu du temps donné, vont aller à 10 puis 11, …

n = 10, on obtient : 101, un nombre premier.

n = 11, on obtient : 121 = 11×11, qui n'est pas un nombre premier.

Ceux-ci diront qu'on obtient des nombres premiers sauf pour n = 11.

L'énoncé: « pour n'importe quel entier naturel n, l'expression **n × n – n + 11** est un nombre premier. » est vrai pour certains élèves.

Pour d'autres, cette affirmation est vraie dans certains cas et fausse dans d'autres cas.

Pour d'autres encore, elle est vraie sauf pour n = 11.

En mathématique, un énoncé mathématique est soit vrai soit faux.

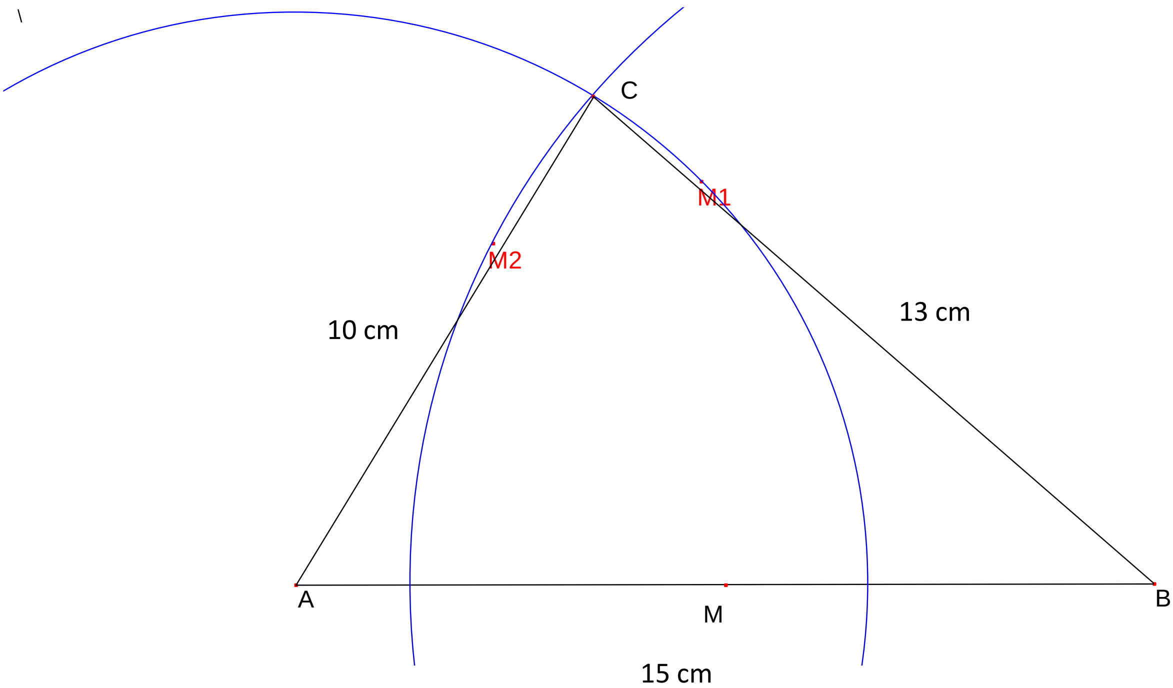
Les premiers constats ne suffisent pas pour prouver une propriété.

Exercice 2 :

Données :

- ☞ ABC triangle AB = 15 cm, AC = 10 cm, BC = 13 cm.
- ☞ M milieu M de [AB]
- ☞ [CM], médiane.

Figure :



Conjecture :

Le triangle BMC semble avoir la plus grande aire pour la majorité des élèves (en observant le dessin et en considérant les dimensions des côtés.

En réalité, ces deux triangles ont la même hauteur et leurs bases ont même mesure, donc même aire.

En mathématique, l'observation d'un dessin ou des mesures sur un dessin ne suffit pas pour prouver un résultat.

<u>Exercice 3</u>

1)

a) Difficultés :

- difficultés à conduire une démonstration,
- conclusions hâtives à partir des figures ou des constats particuliers,

b) Origines des difficultés

- non maîtrise de la langue de communication (Français)
- Confusion entre conjecture et preuve
- Ignorance des principes de démonstration
- Abstraction prématurée

2) Stratégies à mettre en place :

- Apprentissage progressif de la démonstration (partir du concret, pour les amener progressivement vers l'abstrait)
- en sixième et cinquième, se limiter aux justifications par les propriétés et aux schémas de raisonnement
- en quatrième, partir des organigrammes de déduction pour rédiger la démonstration, avec l'utilisation d'un français simple.

- **Règles du débat mathématique pour les élèves** : (En voici quelques-unes)

1°) Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux (le tiers exclu).

Ce principe n'est pas toujours appliqué dans la vie pratique. Un énoncé peut être parfois vrai (vrai à 90%), parfois faux.

2°) Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé.

Ce n'est pas le cas dans la logique naturelle où une exception confirme la règle.

3°) Pour débattre en mathématiques, on s'appuie sur un certain nombre de propriétés ou définitions clairement énoncées sur lesquelles on s'est mis d'accord.

4°) On ne peut pas décider de la validité d'un énoncé en s'appuyant sur le fait que la majorité des personnes présentes sont persuadées que cet énoncé est vrai.

5°) Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver que cet énoncé est vrai.

6°) Une constatation sur un dessin (ou des mesures sur un dessin) ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.

La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses. René Descartes (1596-1650)

Toutes ces règles ne sont pas naturelles pour les élèves. Il est nécessaire de les aider à se les approprier. Pour cela il ne suffit pas de les expliciter mais il faut trouver des situations dans lesquelles l'élève sentira leur nécessité et leur intérêt.

Schématisation du raisonnement déductif

Le chaînon déductif.

En mathématiques, on utilise souvent des énoncés de la forme « si …., alors ….. », appelés **chaînon déductif.**

Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite **alors,** elles sont parallèles.

Dans ces énoncés, l'expression qui est entre « Si » et « alors » est appelée la **condition ou donnée ou hypothèse** de l'énoncé et l'expression qui suit « **alors »** est appelée la **conclusion ou résultat.**

<u>Schéma des énoncés de ce type</u> :

<u>Conditions</u>

<u>(données, hypothèses)</u>

Si, …
Alors, …

<u>Conclusion (Résultat)</u>:

Ce schéma comporte deux types d'étiquettes :

Etiquettes rectangulaires : chacune de ce type porteront soit une seule donnée soit une seule conclusion (Ecriture symbolique). Pour être réutilisées, ces étiquettes seront remplies au crayon.

Etiquettes pentagonales : chacune d'elle portera une seule propriété (la condition en une couleur et la conclusion en une autre couleur).

<u>Exemple</u> : Organigramme de déduction (un pas)

<u>Données</u> (D2) ⊥ (D1) (D3) ⊥ (D1)

<u>Propriété</u>

Si
deux droites sont perpendiculaires à une même droite
alors,
elles sont parallèles

<u>Conclusion</u> **(D2) // (D3)**

<u>Réciproque d'un énoncé</u> :

On donne les deux propriétés :

P1 : « si un triangle est isocèle, alors ce triangle a deux angles de même mesure »

P2 : « si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle »

Parmi ces deux propriétés, quelle est celle qui sert à prouver que deux angles ont même mesure ?

A quoi sert l'autre propriété ?

Que remarque-t-on pour les conditions et les conséquences de ces deux propriétés ?

On trouve la réciproque d'un énoncé en inversant la condition et la conclusion de cet énoncé.

Attention : La réciproque d'un énoncé vrai n'est pas toujours vraie.

Enoncé :

Si deux droites sont perpendiculaires **alors,** elles sont sécantes.

La condition de l'énoncé ci-dessus est : « deux droites sont perpendiculaires » ; sa conclusion est : « elles sont sécantes »

La réciproque de l'énoncé ci-dessus est :

Si deux droites sont sécantes **alors,** elles sont perpendiculaires.

Cet énoncé est faux

NB : La réciproque d'un énoncé vrai n'est pas toujours vraie.

Initiation au raisonnement à l'aide des organigrammes de déduction

L'enseignant devra fabriquer et faire fabriquer par les élèves des étiquettes en carton.

Sur les étiquettes pentagonales, inscrire au préalable les différentes propriétés vues en classe (Condition en couleur rouge et conclusion en couleur bleue).

Pour un exercice donné, après avoir recensé les données et les conclusions, faire noter, au crayon, chacune des données ou chacune des conclusions sur une étiquette rectangulaire.

Les déductogrammes : La démonstration est schématisée à l'aide d'un organigramme de déduction (schéma de déduction) appelé *déductogramme*.

C'est est un outil efficace de visualisation permettant de dégager les différentes étapes d'un raisonnement. Il permet ainsi de familiariser l'apprenant avec l'une des phases clés d'une démonstration à savoir la recherche et la mise en ordre logique des différents chaînons de la décomposition de la conclusion. Il permet aussi de faire voir aux apprenants l'utilité des propriétés et des définitions.

Conformément aux phases de mathématisations (CRA), trois niveaux du déductogramme sont à distinguer :

1er niveau (phase Concrète (C)) : Manipulation des étiquettes

Elle se pratique en début d'apprentissage et offre l'avantage de changer les étiquettes lorsqu'elles ne conviennent pas, bref de tâtonner.

2e niveau (phase semi-concrète ou Représentationnelle (R)) : « dessins » d'étiquettes (organigramme de déduction)

Elle se pratique lorsqu'on est assuré que les étiquettes-propriétés retenues sont les bonnes (cela évite d'avoir à reprendre les schémas) et aussi quand les habitudes sont installées.

3e niveau (phase Abstraite (A)): Rédaction de la démonstration à partir de l'organigramme.

Ce niveau sera présenté dans la séance 3 (cycle d'orientation)

Différentes étapes de résolution d'un problème

a) Lecture de l'énoncé ;

b) Recensement des données (hypothèses) et de(s) conclusion(s) dans le cas des questions fermées (démontre que…) ;

c) Construction de la figure (parlante ou codée), on évitera les cas particuliers et les cas proches des cas particuliers ;

d) Conjectures dans le cas des questions ouvertes (quelle est la nature de…) ;

e) Construction du déductogramme (occasion de répertorier les propriétés permettant d'arriver à la conclusion, de choisir celle qui semble la plus adaptée au problème et de dessiner le schéma de déduction) ;

f) Rédaction de la démonstration.

La rédaction de la démonstration sera abordée dans la séance 3 (cycle d'orientation)

Séance 3 (3h): Apprentissage de la démonstration au cycle d'orientation

Consignes pour le formateur

- Prévenir les participants pour qu'ils apportent avec eux les manuels, les guides pédagogiques et le programme.
- Si possible, le formateur devra prévoir le même matériel et en plus de l'outil informatique avec logiciel de géométrie (cabri géomètre, Géogébra, ou autre) ou à défaut, le matériel collectif de géométrie (pour permettre à partir des figures de faire des conjectures).
- Engager les stagiaires dans une évaluation de l'apprentissage de la démonstration au cycle d'orientation
- Faire concevoir par les stagiaires des stratégies d'aide aux élèves dans la recherche et la production des preuves.

<u>Consignes du Stagiaire :</u>

- Traiter les exercices proposés au sein de votre groupe.
- Faire la restitution

<u>Exercice 1</u> :

Appliquer les démarches de résolution des problèmes aux exercices CIAM 4e, Page 14, Exercice 1 et Exercice 4, puis à partir de l'organigramme de déduction rédiger la démonstration puis donner une procédure de la rédaction de la démonstration.

<u>Exercice 2</u> : (Problème de construction)

Deux points A et B étant donnés.

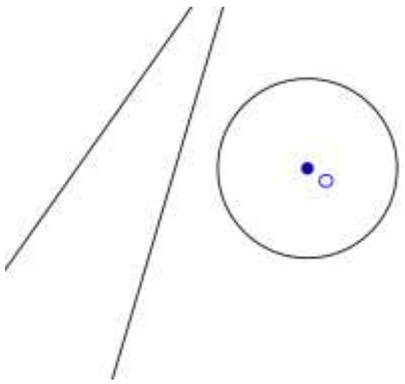
1°) Construire à l'aide de la règle et du compas un point C tel que le triangle ABC soit rectangle en C. Combien de possibilités pour le point C.

2°) Déterminer l'ensemble de tous les points C tel que le triangle ABC soit un triangle rectangle en C.

Résoudre puis donner une stratégie de résolution des problèmes de construction.

<u>Exercice 3</u>: (Problème de construction)

Sur la figure ci-contre (D) et (D') sont deux droites et (C) un cercle de centre O.



(C)

Construis un point M sur (D) et un point N sur (C) tels que (D') soit la médiatrice du segment [MN].

(D)

(D')

Synthèse du formateur

Solution de l'exercice n°1

Solution de l'exercice CIAM 4e, Page 14, Exercice 4

Données :

- ☞ ABC triangle rectangle en A
- ☞ mes $\widehat{ABC}$ = 60°
- ☞ I milieu de [BC]

Conclusion :

ABI triangle équilatéral

Figure :

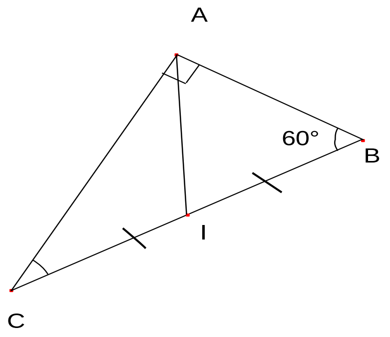


Schéma du raisonnement

Données

ABC est rectangle en A

I est milieu de [BC]

Propriété 1 :

Si un triangle est rectangle ***alors****, le milieu de son hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à ce triangle*

Conclusion 1 :

I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

Propriété 2 :

Si *(C) est un cercle de centre I* ***alors****, tout point de (C) est équidistant de I*

Conclusion 2 :

IA = IB

Propriété 3 :

Si *un triangle a deux côté de même mesure* ***alors****, il est isocèle*

Conclusion 3 et Donnée :

AIB isocèle

mes ABC = 60 °

Propriété 4 :

Si *un triangle isocèle a un angle de mesure 60°* ***alors****, il est équilatéral*

Conclusion :

ABI est un triangle équilatéral

Rédaction de la démonstration

Selon les données, ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu [BC] qui est l'hypoténuse du triangle ABC.

Or, si un triangle est rectangle, le milieu de son hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

D'où I est le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

D'autre part, Si (C) est un cercle de centre I, alors tout point du cercle est situé à égale distance de I.

D'où IA = IB. IAB est un triangle isocèle de sommet principal I

On sait de plus que mes $\widehat{ABC}$ = 60° . Or, si un triangle isocèle a un angle de mesure 60° alors il est équilatéral.

Donc, le triangle ABI est un triangle équilatéral.

Solution de l'exercice CIAM 4e, Page 14, Exercice 4

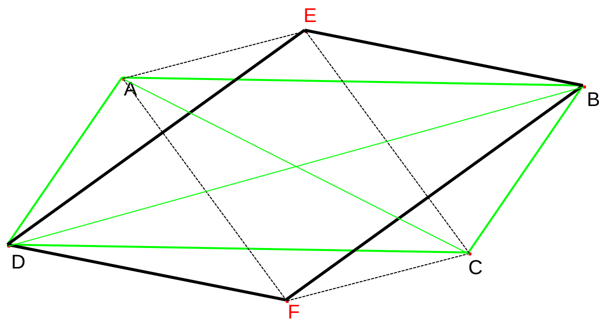
Données :

- ☞ ABCD est un parallélogramme
- ☞ AECF est un parallélogramme

Conclusion :

EBFD est un parallélogramme

Figure :



<u>Schéma du raisonnement</u> :

ABCD est un parallélogramme

AECF est un parallélogramme

Si *un quadrilatère est un parallélogramme* ***alors,*** *ses diagonales se coupent en leur milieu*

[AC] et [BD] ont même milieu

[AC] et [EF] ont même milieu

[BD] et [EF] ont même milieu

Si *les diagonales d'un quadrilatère ont même milieu* ***alors,*** *il est un parallélogramme*

EBFD est un parallélogramme

<u>Rédaction de la démonstration</u>

Selon les données, on sait que, ABCD et AECF sont des parallélogrammes.

Or, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

D'où d'une part [AC] et [BD] ont même milieu et d'autre part [AC] et [EF] ont même milieu.

Donc [BD] et [EF] qui sont les diagonales du quadrilatère EBFD ont même milieu.

Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

On conclut que le quadrilatère EBFD est un parallélogramme.

Solution de l'exercice 2 :

Données :

- ☞ A,
- ☞ B,
- ☞ [AB]

Contraintes :

ABC triangle rectangle en C

Instruments imposés :

Règle et compas

Esquisse :

Analyse de l'esquisse :

Le triangle ABC est rectangle en C, donc C est sur le cercle de diamètre [AB].

Recherche de la méthode de construction à partir de l'esquisse

Ecrire le programme de construction :

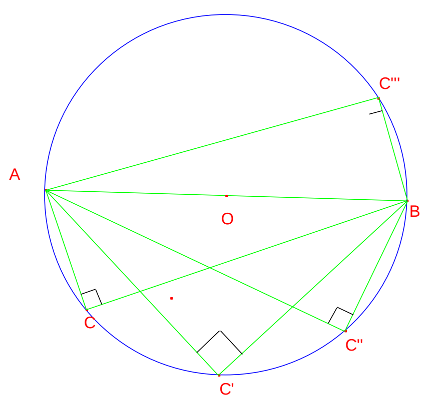
Construire le segment [AB]

Construire le cercle de diamètre [AB].

Marquer un point C sur le cercle distinct de A et de B.

On obtient un triangle ABC rectangle en C.

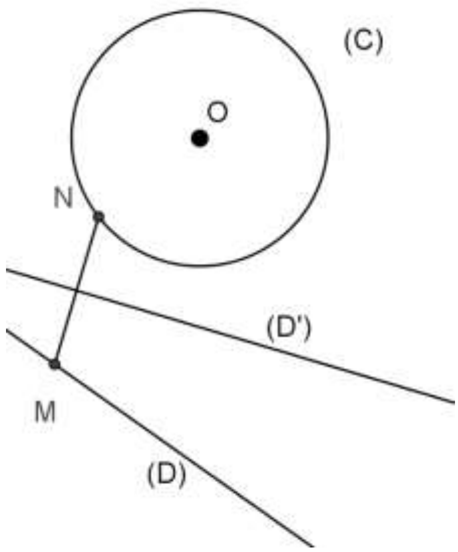
Réaliser la construction de la figure :



Justifier que la figure obtenue respecte les contraintes de l'énoncé :

Exercice 3

Réalisation de l’esquisse



Analyse de l’esquisse

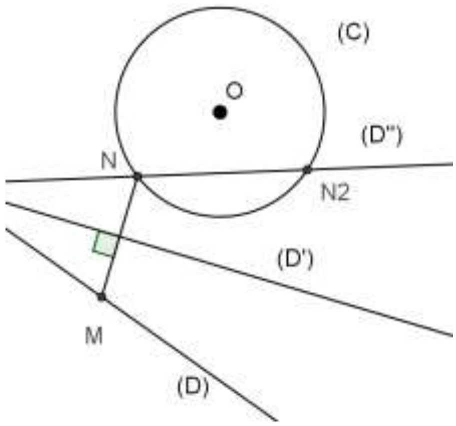
(D’) est la médiatrice du segment [MN] : N est le symétrique de M par rapport à (D’) .

Comme M ∈ (D) donc son symétrique N appartient au symétrique (D’’) de (D) par rapport à (D’).

Par ailleurs, N appartient au cercle (C), il s’ensuit que N est un point commun à (D’’) et (C).

Construction

- Construire le symétrique (D’’) de (D) par rapport à (D’).
- N est l’un des points communs de (D’’) et (C) .
- Le point M est le point de concours de (D) et de la perpendiculaire à (D’) passant par N. (M est le symétrique de N par rapport à (D’))



Vérification

N est un point commun de (D’’) et (C) :

- N ∈(C) ;

- (D’’) est le symétrique de (D) par rapport à (D’) donc le point M symétrique de N par rapport à (D’) est un point de (D) : M ∈ (D) ;

- l’axe de symétrie (D’) est la médiatrice du segment [MN]

N.B : on peut aussi partir du symétrique du cercle (C) par rapport à (D’).

Différentes étapes d'une démonstration

Les étapes a) à e) abordées au cycle d'observation sont complétées par :

f) Rédaction de la démonstration.

3e niveau (phase Abstraite): Rédaction de la démonstration à partir de l'organigramme.

La rédaction directe (sans passer par les deux premiers niveaux) est possible à partir de la classe de 4^{e}. On commencera avec des déductogrammes à compléter (étiquettes pentagonales) soit avec les boites à outils (formulaire avec les différentes propriétés vues en classe), soit en renseignant des cases vides. Ensuite les élèves élaboreront seuls les déductogrammes.

Rédaction de la démonstration (littéraire)

Traduire en **français simple** les contenus des étiquettes du haut vers le bas en utilisant les phrases de transition telles que :

• On sait que …… (donnée)

• D'après la propriété : « si (condition) alors (conséquence) »

• On conclut que… (conclusion).

Stratégies de contrôle

Voici les différentes questions qu'il faut se poser pour contrôler la rédaction d'une démonstration : (Questions dénommées « **les cinq commandements** »)

1. Ce que l'on place dans « on sait que.. » est- il bien une donnée ou la conclusion d'un chaînon précédent ?
2. Les propriétés utilisées existent- t - elles ?
3. Y-a-t-il correspondance entre les données et la condition de la propriété ?
4. Y-a-t-il correspondance entre la conséquence de la propriété et la conclusion du chaînon ?
5. La dernière conclusion du dernier chaînon correspond-t-elle à ce qu'il faut démontrer ?

Astuce *: Faire le parallèle entre les données de l'exercice et la condition de la propriété, la conclusion de la propriété et la conclusion à démontrer*

Différentes étapes de résolution d’un problème de construction

a) Dégager de l’énoncé les données, les contraintes et les instruments imposés.

b) Faire une esquisse de la figure.

c) Analyser l’esquisse.

d) Rechercher la méthode de construction à partir de l’esquisse.

e) Ecrire le programme de construction.

f) Réaliser la construction de la figure.

g) Justifier que la figure obtenue respecte les contraintes de l’énoncé.

SEQUENCE 3 : APPROFONDISSEMENT : GEOMETRIE DANS L'ESPACE ET HOMOTHETIES

Problématique

Au fil des années, les enseignants éprouvent de plus en plus des difficultés dans la préparation et la conduite des leçons de géométrie de l'espace. Dans l'exécution du programme de mathématiques, ces leçons ne sont jamais abordées par la plupart des enseignants ; les raisons souvent évoquées sont la grande étendue du programme et l'insuffisance de temps pour l'épuiser. Une grande partie des enseignants de mathématiques n'a pas reçu la formation dans ce domaine. Dans ce contexte, l'apprenant au terme de son étude du secondaire n'acquiert pas, ou se voit privé, de connaissances en géométrie de l'espace et sur les homothéties.

Cette séquence a donc pour objectif de renforcer les compétences des enseignants de mathématique dans la préparation et la conduite des leçons portant sur l géométrie dans l'espace et les homothéties.

Séance 1 (7 heures) : Solides de l'espace : Cône de révolution

L'objectif principal de cette séance est de renforcer les capacités des stagiaires en matière de conception d'activités de découverte du cône de révolution, d'utilisation du vocabulaire adéquat pour la description du cône, de réalisation du patron, de la détermination expérimentale du volume du cône, du calcul de l'aire latérale et de l'aire du cône, la détermination du volume d'un tronc de cône.

Cette séance sera découpée en 4 sous séances.

Sous séance 1 : 1 h

Activité de découverte d'un cône de révolution

Consignes pour le formateur

- Constituer des groupes de 5 à 6 stagiaires ;
- Faire fabriquer le dispositif décrit ci-dessous par chaque groupe ;
- Faire découvrir la notion de cône à partir de ce dispositif.

Matériel à utiliser

- Feuille cartonnée ;
- Ciseaux ;
- Colle ou bande adhésive ;
- Brindille dure ;
- Instruments de géométrie.

Consigne d'activité pour les stagiaires

a) Fabrication du dispositif

- Réalise dans une feuille cartonnée un triangle ABC rectangle en A.
- Découpe le triangle ABC.
- Colle sur le triangle, suivant le côté [AC] une brindille rigide et rectiligne.

b) Utilisation du dispositif

- Pose le dispositif verticalement sur la table.
- Fais tourner ce dispositif entre le pouce et l'index le plus vite possible.

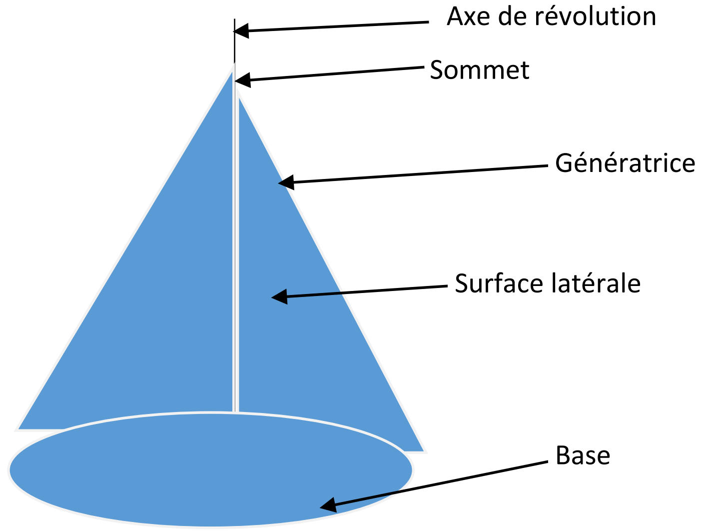
  On engendre ainsi un solide. Précise lequel ?
- Précise les éléments caractéristiques de ce solide.
- Identifie la surface engendrée par le côté [AC] et celle engendrée par [BC].

Synthèse du formateur

Vocabulaire

1) Le solide engendré est un cône de révolution qui se présente comme la figure ci – après

Figure 1



Les éléments caractéristiques de ce cône de révolution sont :

- le rayon (le segment [AB]) ,
- la hauteur (le segment [AC]),
- le sommet (le point C) ,
- la génératrice (le segment [AC]), comme l'indique la figure ci- contre :

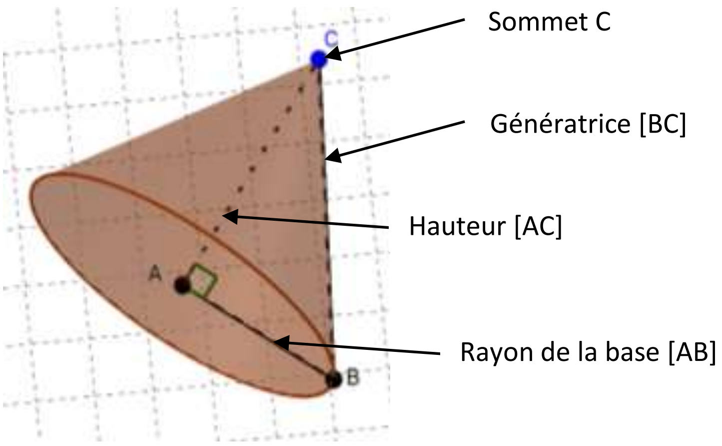


Figure 2

> **Soit ABC un triangle rectangle en A.**
> **Si ABC est en rotation autour de (AC), alors il engendre un cône de révolution de rayon AB, de hauteur AC et de génératrice BC.**

1) **Les surfaces engendrées :**

   [AB] a engendré la surface de base et [BC] a engendré la surface latérale.

> **Un cône de révolution admet deux types de surfaces :**
> - **La surface latérale engendrée par une génératrice.**
> - **La surface de base engendrée par un rayon.**

Sous séance 2 (1 h) : Réalisation du patron d'un cône de révolution

Consigne pour le formateur :

- constituer des groupes de 5 à 6 stagiaires
- Faire fabriquer le patron par les groupes à partir du matériel et la méthodologie proposée.

Matériel utilisé

- Feuille
- Ciseaux
- Colle
- Instruments de géométrie.

Consigne d'activité du stagiaire

- trace sur une feuille un cercle de centre S et deux rayons de ce cercle.
- Découpe le disque suivant les deux rayons. On obtient deux parties (I) et (II).
- Colle avec du ruban les rayons bord à bord. On obtient ainsi les surfaces latérales des deux cônes 1 et 2.
- Trace sur une feuille les cercles que matérialisent les bords inférieurs de tes deux cônes incomplets
- Découpe les deux disques correspondants qui sont les bases des deux cônes 1 et 2.

Synthèse du formateur

Les parties I et II de la figure ci-dessous constituent respectivement les patrons des surfaces latérales des cônes sans base.

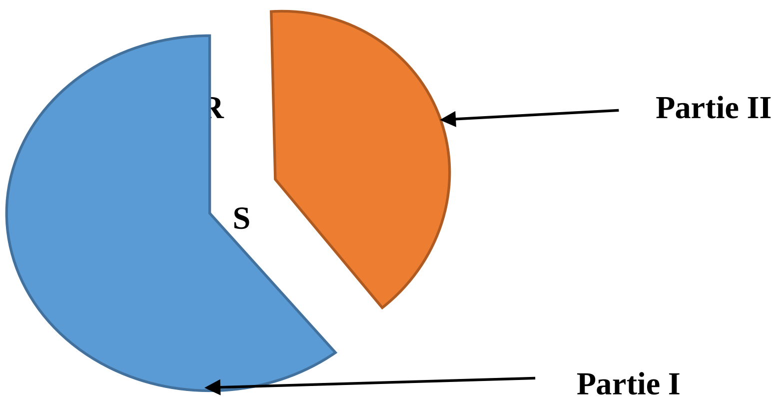
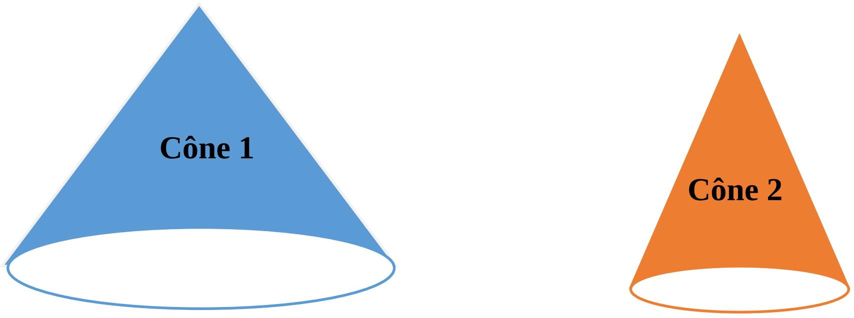


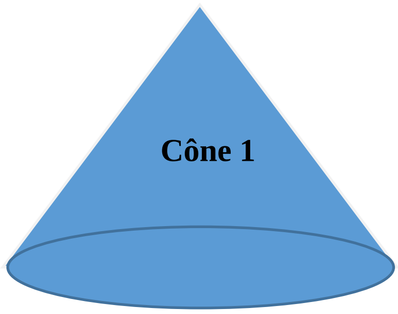
Figure 1

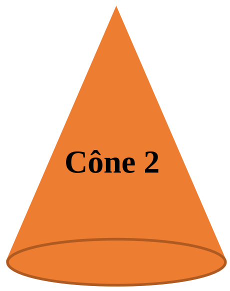
La jonction des deux bouts de chaque patron permet d'obtenir les cônes 1 et 2 ci-dessous.

figure 2

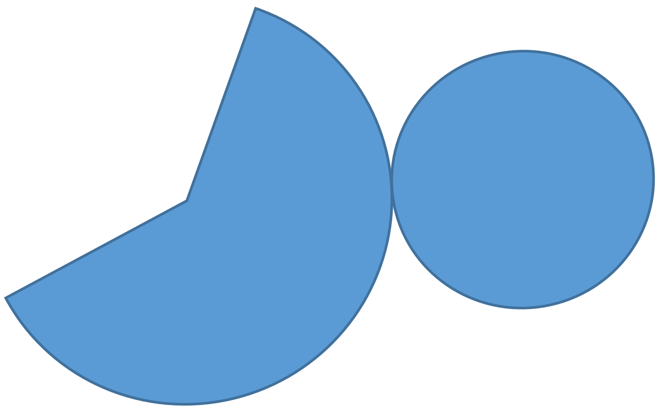


En traçant les cercles que matérialisent les bords inférieurs de chacun des deux cônes incomplets puis en découpant les deux disques correspondants qui sont les bases des deux cônes, on obtient ainsi les deux cônes 1 et 2 avec leur base comme l'indiquent les figures ci – dessous :

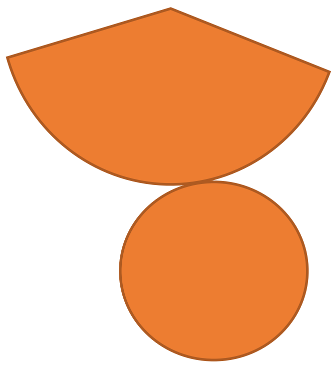




dont les patrons sont les suivants :



Patron du cône 1



Patron du cône 2

Description :

Le patron de chacun des cônes de révolution 1 et 2 est constitué :

- d'un patron de la surface latérale
- d'un disque de sa base.

Sous séance 3 (2 h) : Calcul de l'aire latérale d'un cône de révolution

Consigne pour le formateur

- Constituer des groupes de 5 à 6 stagiaires ;
- Amener les stagiaires à faire le lien entre les éléments du secteur circulaire et ceux du cône ;
- Faire déterminer l'angle au centre et l'expression de l'aire latérale.

Consigne d'activité du stagiaire

Chaque groupe répondra aux questions ci-après.

On considère un cône de révolution sans base de rayon r = 4,5 cm et hauteur h = 6cm.

1) Calcule la longueur de la génératrice g du cône.
2) On découpe l'aire latérale du cône suivant une génératrice.

a) Quelle est la forme géométrique donnée par le patron de la surface latérale du cône ?
b) Précise ses éléments en fonction de ceux du cône.
c) Calcule l'angle au centre α qui intercepte l'arc défini par le patron de la surface latérale du cône.
d) En déduis l'aire latérale A du cône.

Synthèse du formateur

Vocabulaire

- L'angle au centre α partage le disque de centre S en deux parties, appelées des **secteurs circulaires**. Chacun de ces secteurs circulaires est le patron de la surface latérale d'un cône de révolution.
- **Les éléments du secteur circulaire ou du patron de la surface latérale d'un cône de révolution.**

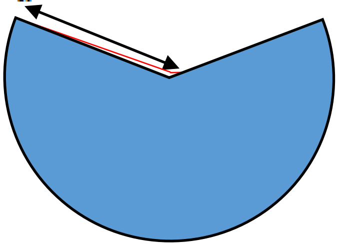
1) Calcul de la génératrice

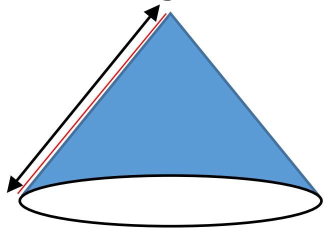
$g^2 = r^2 + h^2$g = 7,5 cm

La génératrice g d'un cône de rayon r et de hauteur h est telle que $g^2 = r^2 + h^2$

Les éléments du secteur circulaire sont liés à ceux du cône de révolution comme l'indique la figure ci - dessous. Ainsi :

- Rayon du secteur circulaire = génératrice du cône
- Centre = sommet du cône
- Arc de cercle = circonférence de la base du cône.





Le patron de la surface latérale d'un cône de révolution de sommet S et de génératrice g est un secteur circulaire de centre S et de rayon g

- **Calcul de l'angle au centre**

$2\pi g \rightarrow 360°$

$2\pi r \rightarrow \ \alpha$ donc $\alpha \ = 360° \times \frac{r}{g}$

L'angle au centre qui intercepte l'arc du patron de la surface latérale d'un cône de rayon r et de génératrice g est : $\alpha \ = 360° \times \frac{r}{g}$

- **Déduction de l'aire latérale A du cône**

$\pi g^2 \rightarrow 360°$

$A \rightarrow \ \alpha$ donc $A = \frac{\alpha \pi g^2}{360°}$

$\alpha \ = 360° \times \frac{r}{g}$ donc

$A = \ \pi g r$

L'aire latérale d'un cône de rayon r et de génératrice g est $A = \ \pi g r.$

Sous séance 4 (2h) : Détermination du volume d'un cône de révolution

Consigne pour le formateur

- Constituer des groupes de 5 à 6 stagiaires
- Faire fabriquer un cylindre de même hauteur et de même rayon que le cône de la séance précédente.

- Faire déterminer expérimentalement le volume du cylindre en fonction du volume du cône.

Matériel

- Feuille cartonnée
- Ciseaux
- Colle / scotch
- Sable
- Instruments de géométrie.

Consigne d'activité du stagiaire

Les stagiaires feront en groupe l'activité ci-après.

1) Fabrique un cylindre de même rayon $r = 4{,}5\ cm$ et de même hauteur $h = 6\ cm$.
2) Calcule :
    a) La génératrice g du cône.
    b) L'aire totale B du cône.
    c) Le volume V du cylindre fabriqué.
    d) Verse dans le cylindre le contenu du cône rempli de sable, jusqu'à remplir le cylindre.
    e) Déduis-en alors le volume V du cylindre en fonction du volume v du cône.

Synthèse du formateur

Vocabulaire

- **Les calculs**

1) a)Calcul de g

$g^2 = r^2 + h^2 g = 7{,}5\ cm$

b)Calcul de l'aire totale

$B = \pi g r + \pi r^2 B = 169{,}56 cm^2$

c)Calcul du volume du cylindre

$V = \pi r^2 h V = 381{,}51 cm^3$

- **Déduction de v en fonction de V.**

$V = 3v$. On en déduit $v = \frac{1}{3}V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Soit un cône de hauteur h et de rayon r. Son volume est $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Séance 2 (4h) : Positions relatives dans l'espace

***Objectifs pédagogiques* :**

- ❖ Reconnaitre une droite/un plan de l'espace
- ❖ Utiliser les propriétés d'un solide donné pour :
  - justifier qu'une droite et un plan sont parallèles/sécants/orthogonaux.
  - reconnaitre le point d'intersection d'une droite et d'un plan sécants.
- ❖ Utiliser les propriétés d'un solide donné pour :
  - Justifier que deux plans sont parallèles/sécants/perpendiculaires.
  - Reconnaitre la droite d'intersection de deux plans sécants.
- ❖ Utiliser les propriétés d'un solide donné pour :
  - Justifier que deux droites sont parallèles/sécants/orthogonaux.
  - Reconnaitre le point d'intersection de deux droites sécantes.

Sous séance 1 (1h) : Droites et plans de l'espace

Consignes pour le formateur

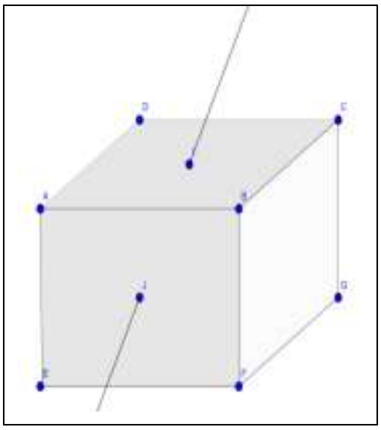
- Constituer des groupes de 5 ou 6 stagiaires
- Demander à chaque groupe de traiter les exercices proposés.
- Demander à un groupe de dire l'utilisation qu'on peut faire de chacun des exercices Faire préciser l'essentiel à retenir lorsqu'il s'agit d'une activité
- Faire la synthèse.

Consignes d'activités pour le stagiaire

- Traiter les deux les exercices proposés.
- Quelle utilisation peut-on faire de chacun des exercices. Précisez l'essentiel à retenir lorsqu'il s'agit d'une activité
- Restituer le travail de votre groupe.

<u>Exercice 1</u> :

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH. I et J sont les centres respectifs des carrés ABCD et ABFE.



- Reproduis la figure et trace les supports des arêtes [AB] et [CF].
- Réalise ce cube et perce la face ABCD en I et la face ABFE en J
- Comme l'indique la figure, fais passer une brindille par I et J.
- Fais passer une brindille en plus.
- Que constates-tu ?

Exercice 2 :

La figure1 ci-contre représente un prisme ABCDEF placé sur une table.

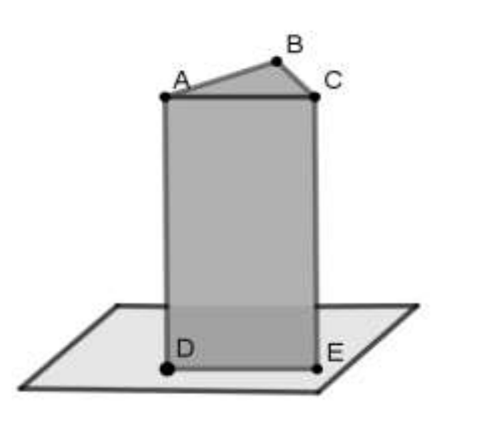


Figure 1

- Reproduis cette figure.
- Trace les droites (AB), (AC) et (DE).
- Donne la position relative des droites (AB) et (AC) puis celle de (AC) et (DE).

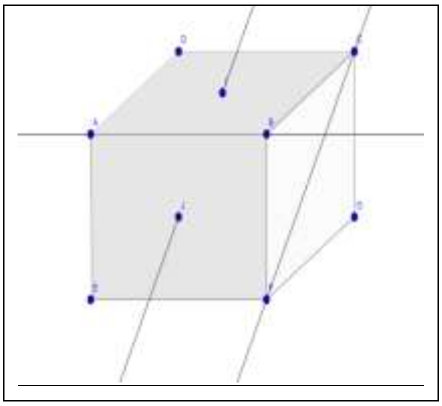
On déplace le prisme de la table.

Sur une autre figure :

- représente les traces de la base DEF du prisme sur la table.
- Trace les droites (D)

Synthèse du formateur

Exercice 1



- Reproduction et réalisation de la figure puis tracé des arêtes [AB] et [CF].
- Constat

On constate qu'on ne peut plus faire passer de brindille par I et J.

Vocabulaire :

Les arêtes [AB] et [CF] du cube sont des **segments** de l'espace.

Les supports de ses arêtes sont des **droites** de l'espace. On les note : (AB), (CF).

Propriété:

Dans l'espace, deux points distincts A et B déterminent une droite, et une seule : on la note (AB).

Exercice 2

- Reproduction de la figure 1.
- Tracé des droites (AB), (AC) et (DE) (confère figure 1).
- Positions relatives : les droites (AB) et (AC) sont sécantes ; les droites (AC) et (DE) sont parallèles.
- Représentation des traces de la base DEF du prisme (confère figure 2).
- Tracé la droite (DE) (confère figure 2.

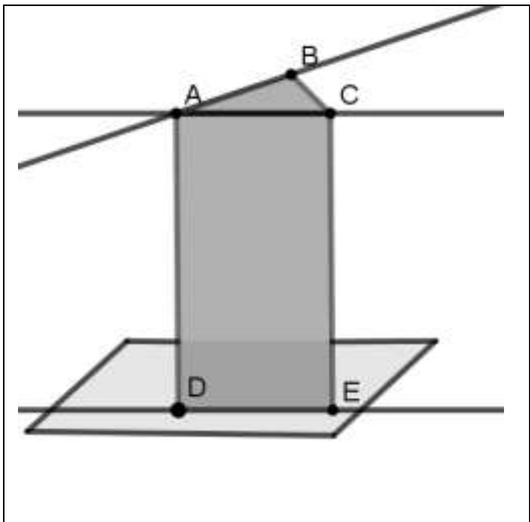


Figure 1

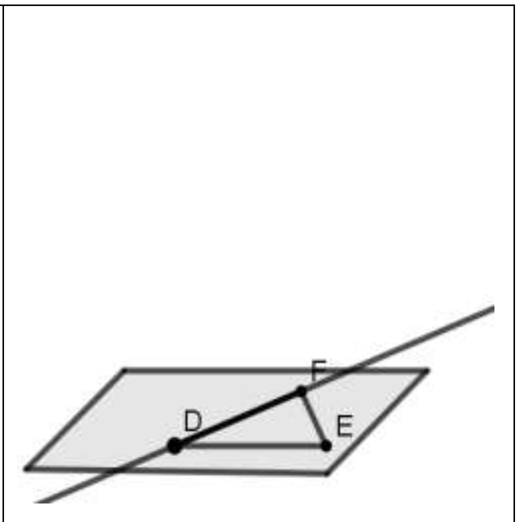


Figure 2

Vocabulaire :

Les faces ABC et ADEC du prisme représentent des **plans** de l'espace. On les note : (ABC), (ADEC).

Les droites (AB) et (AC) sont sécantes, on dit que (AB) et (AC) définissent le plan(ABC).

Les droites (AC) et (DE) sont parallèles on dit que (AC) et (DE)définissent le plan (ADEC).

Les points D, E et F ne sont pas alignés ; ils définissent le plan de la table : on le note (DEF). On dit aussi que la droite (DE) et le point F définissent le plan (DEF).

Les points D et E appartiennent au plan de la table ; on dit que la droite (DE) est dans ce plan, ou est contenue dans ce plan.

Propriétés :

Dans l'espace :

La droite qui passe par deux points distincts d'un plan est contenue dans ce plan.

Trois points non alignés A, B et C déterminent un plan : on le note (ABC).

Deux droites parallèles déterminent un plan.

Deux droites sécantes déterminent un plan.

Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite déterminent un plan

Sous séance 2 (1h) : Positions relatives d'une droite et d'un plan

Consignes pour le formateur

- Constituer des groupes de 5 ou 6 stagiaires
- Demander à chaque groupe de traiter l'activité de découverte proposée.
- Demander à un groupe de restituer.
- Faire la synthèse.

Consignes d'activités pour le stagiaire

- Traiter l'activité de découverte proposée dégager l'essentiel à retenir.
- Restituer le travail de votre groupe.

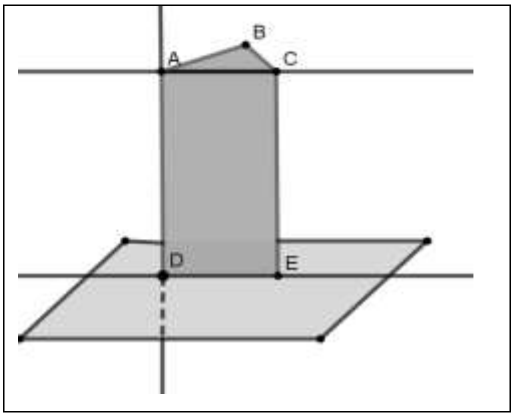
Activité :

Reproduis et réalise la figure de l'activité 2.

- Trace la droite (AD). Quel est le point de concours de (AD) et du plan de la table (DEF) ?
- A l'aide d'une équerre, vérifie la perpendicularité des droites (AD) et (DE) et celle des droites (AD) et (DF). Que peux-tu dire de la position de la droite (AD) et du plan (DEF) ?
- Trace les droites (AC) et (DE). Existe-t-il un point de concours des droites (AC) et (DE) ? de la droite (AC) et du plan de la table ?

Synthèse du formateur

Activité :



- Reproduction et construction (Confère la figure ci-contre)
- D est le point de concours de (AD) et du plan de la table.
- Vérification et constat

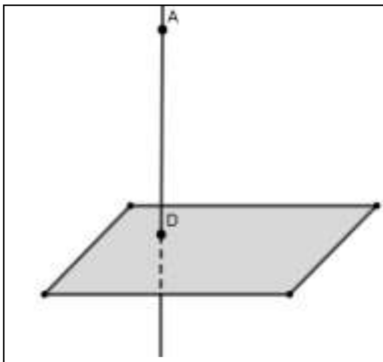
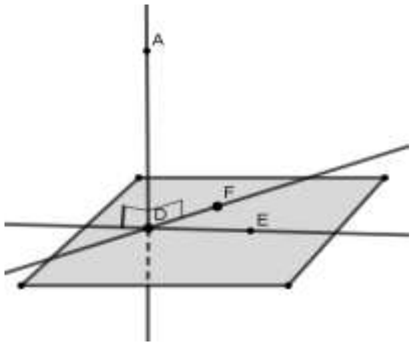
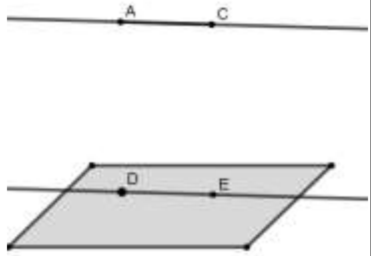
  Les droites (AD) et (DE) sont perpendiculaires, de même les droites (AD) et (DF) sont perpendiculaires.
- Il n'existe pas de point de concours de (AC) et (DE) . De même, il n'existe pas de point de concours de (AC) et du plan de la table ?

Définitions : droite et plan sécants, droite et plan perpendiculaires, droite et plan parallèles.

On dit qu’une droite et un plan sont sécants lorsqu’ils ont un point en commun et un seul.

On dit qu’une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu’elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

On dit qu’une droite est parallèle à un plan lorsqu’elle est parallèle à une droite de ce plan

		
(AD) et le plan de base sont sécants. D est leur point d’intersection	(AD) est perpendicualire au plan de la base.	(AC) et (DE) sont parallèles

Propriété :

Si une droite est perpendiculaire à un plan en un point A, alors elle est perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par A.

Sous séance 3 (1h) : Positions relatives de deux plans

Consignes pour le formateur

- Constituer des groupes de 5 ou 6 stagiaires
- Demander à chaque groupe de traiter l'activité de découverte proposée.
- Demander à un groupe de restituer.
- Faire la synthèse.

Consignes d'activités pour le stagiaire

- Traiter l'activité de découverte proposée et dégager l'essentiel à retenir.
- Restituer le travail de votre groupe.

Activité :

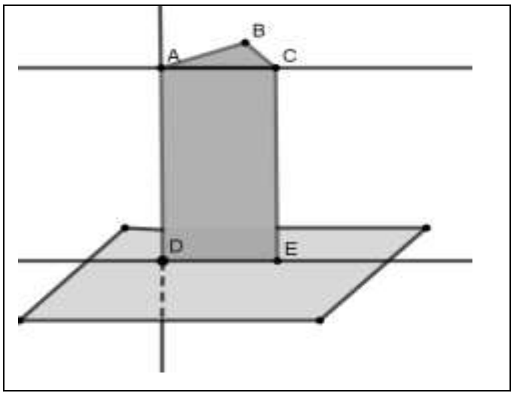
Reproduis et réalise la figure de l'activité 3.

- Justifie que la droite (AD) est à la fois perpendiculaire au plan (ABC) et au plan (DEF).
- Les plans (ABC) et (DEF) ont-ils des points communs ?
- Les plans (ADE) et (ABF) sont-ils confondus ?
- Justifie que la droite (AD) est à la fois une droite du plan (ADE) et du plan (ABF).
- Trouve une droite du plan (ADE) qui est perpendiculaire au plan (DEF).

Synthèse du formateur

Activité :

- Reproduction et construction
  (Confère la figure ci-contre)
- Justification.



On sait déjà que (AD)⊥ (DEF) ;

(AC) et (AB) sont deux droites sécantes du plan (ABC), de plus (AD) est perpendiculaire à chacune des droites (AC) et (AB) ; on conclut que (AD) est perpendiculaire à (ABC).

Donc (AD) est à la fois perpendiculaire au plan (ABC) et au plan (DEF).

- Les plans (ABC) et (DEF) n'ont pas de points communs.
- Les plans (ADE) et (ABF) ne sont pas confondus. (ils sont représentés par les deux faces (ADEC) et (ABFD) du prisme).
- Justification.

A et D sont deux points du plan (ADE) donc la droite (AD) est une droite de ce plan.

De même (AD) est une droite de (ABF) car ce plan contient les points A et D.

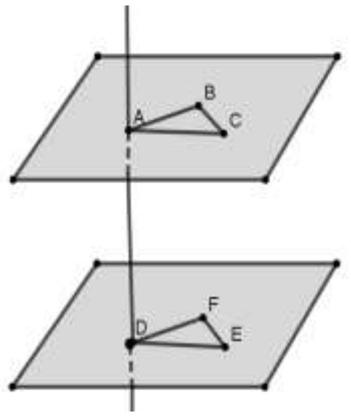
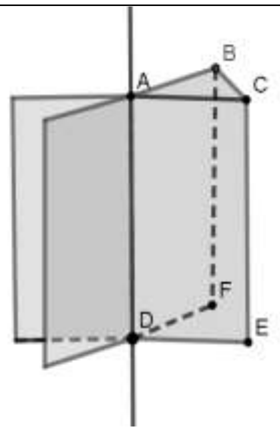
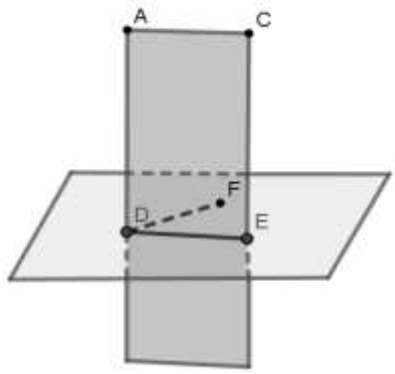
- (AD), (CE), (BF) sont des droites du plan (ADE) qui sont perpendiculaire au plan (DEF).

<u>Définition</u> : plans parallèles, plans sécants, plans perpendiculaires.

Deux plans sont parallèles lorsqu'ils admettent une droite perpendiculaire commune.

On dit que deux plans sont sécants lorsqu'ils ont une droite commune.

On dit que deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

		
Les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles. (AD) est leur perpendiculaire commune.	Les plans (ABF) et (ACD) sont sécants. (AD) est leur droite d'intersection.	Les plans (ADE) et (DEF) sont perpendiculaires. (AD) est une droite de (ADE) et est perpendiculaire à (DEF).

<u>Propriétés :</u>

Lorsque deux plans distincts sont parallèles ;

- ils n'ont aucun point en commun.
- toute droite de l'un est parallèle à l'autre.

Sous séance 4 (1h) : Positions relatives de deux droites

Consignes pour le formateur

- Constituer des groupes de 5 ou 6 stagiaires
- Demander à chaque groupe de traiter l'activité de découverte proposée.
- Demander à un groupe de restituer.
- Faire la synthèse.

Consignes d'activités pour le stagiaire

- Traiter l'activité de découverte proposée et dégager l'essentiel à retenir.
- Restituer le travail de votre groupe.

Activité :

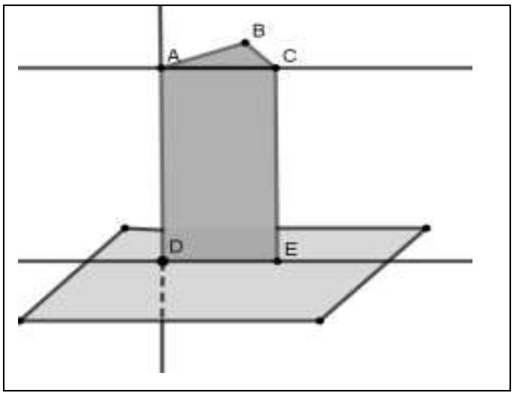
Reproduis et réalise la figure de l'activité 3.

- Cite deux droites qui sont contenues dans un même plan quelle est la position relative de ces deux droites ?
- Cite deux droites qui sont contenues dans un même plan et qui n'ont pas la position relative précédente.
- Cite deux droites qui ne sont pas contenues dans un même plan. Sont-elles parallèles ? Sont-elles sécantes ?

Synthèse du formateur

Activité :

- Reproduction et construction (Confère la figure ci-contre)
- Les droites (AB) et (AC) sont contenues dans le plan (ABC). (AB) et (AC) sont sécantes.
- Les droites (AD) et (CE) sont contenues dans le plan (ADE). (AD) et (CE) sont parallèles.

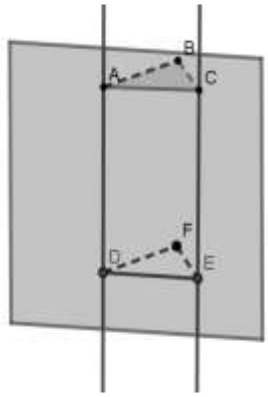
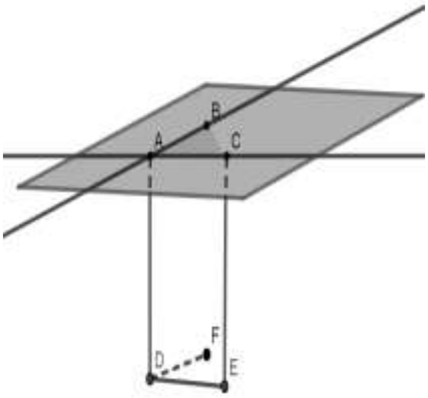
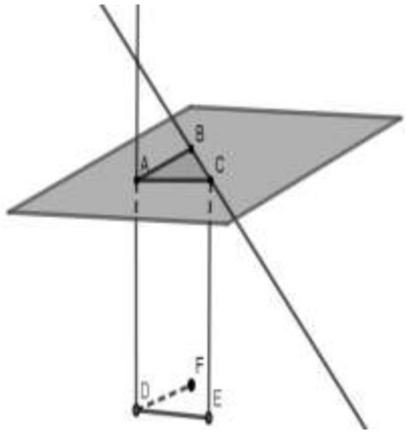


- Les droites (AD) et (BC) ne sont pas contenues un même plan. Elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

<u>Définition :</u> droites coplanaires, droites non coplanaires

On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont contenues dans un même plan.

On dit que deux droites sont non coplanaires si aucun plan ne les contient.

		
(AD) et (CE) sont coplanaires. Elles sont contenues dans le plan (ADE)	(AB) et (AC) sont coplanaires. Elles sont contenues dans le plan (ABC).	(AD) et (BC) sont non coplanaires.

<u>Propriétés :</u>

Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Deux droites sont non coplanaires si et seulement si elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

Si deux droites sont parallèles alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

Séance 3 : Homothéties

Consignes pour le formateur

- Constituer des groupes de 5 ou 6 stagiaires
- Demander à chaque groupe de traiter les activités de découverte proposées.
- Demander à un groupe de restituer.
- Faire la synthèse.

Consignes d'activités pour le stagiaire

- Traiter les deux activités de découverte proposées et dégager l'essentiel à retenir.
- Restituer le travail de votre groupe.

Activité 1

O, A et B sont trois points non alignés du plan.

1. Agrandis le triangle OAB pour obtenir un triangle OA'B' deux fois grand.
2. Exprime les vecteurs: $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ respectivement en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   Compare les distances OA', OB' et A'B' respectivement à OA, OB et AB.
3. On considère l'application h qui, à un point M du plan associe le point M' tel :
   $\overrightarrow{OM'} = 2\,\overrightarrow{OM}$
   Quelles sont les images par h des point A et B ?
4. Quelle est la position relative des droites (A'B') et (AB) ?
5. Calcule $\frac{OA'}{OA}$,$\frac{OB'}{OB}$ et$\frac{A'B'}{AB}$ .Que peut-on conclure ?

Activité2

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=5cm et AC =7cm

1. Calcule BC et l'aire du triangle ABC
2. Soit O un point hors du triangle ABC, on considère l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{1}{3}$
   a) Construis A', B'et C' images respectives des points A, B et C par cette homothétie.
   b) Calcule B'C'
   c) Démontre que le triangle A'B'C' est rectangle en A'

d) Calcule l'aire de ce triangle puis complète aire(A'B'C')=………aire(ABC)

Synthèse du formateur

Résolution de l'activité 1

1. Construction du triangle OA'B'

   - On place sur la demi-droite [OA) le point A' tel que OA' = 2OA.

   - On utilise la propriété de Thalès pour construire le point B' sur la demi-droite [OB).

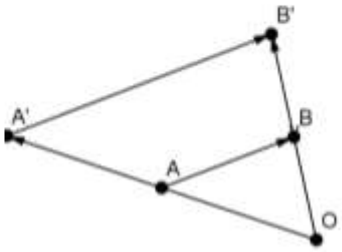
2. On a :

   - $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$.

   - $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{AB}$. D'où $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$

   On obtient : OA' = 2OA, OB' = OB et A'B' = 2 AB .

3. Les images de A et B par h sont respectivement A' et B'.
4. Les droites (AB) et (A'B') sont parallèles car les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
5. D'après la question 2. , on a : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = 2.$ On conclut que les triangles OAB et OA'B' sont semblables.



Essentiel à retenir :

Définition : O est un point du plan et k est un nombre réel positif non nul .

6. On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application h qui, à tout point M du plan associe le point M' tel : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$

Remarque :

Lorsque 0<k<1, l'application est une réduction

Lorsque k>1, l'application est un agrandissement.

Lorsque k=1, l'image d'un point M est le point M lui-même. Il s'agit alors de l'application identique (ou identité du plan) du plan.

Propriétés

- Par une homothétie de rapport k (k>0) :

- L'image d'un segment est un segment
- L'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

- Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par k

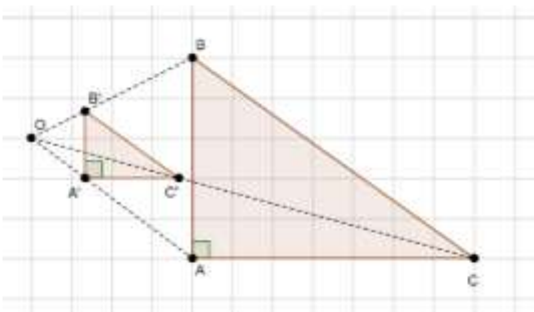
<u>Résolution de l'activité 1</u>

1- <u>Calcul de BC</u>

ABC est rectangle en A : d'après la propriété de Pythagore, $BC^2 = AC^2 + AB^2$. D'où $BC = \sqrt{74}$ cm .

<u>Calcul de l'aire du triangle ABC :</u>

Aire de ABC = $\frac{AC \times AB}{2} = \frac{35}{2}$ cm^2 .



2- a) Construction de A' , B' et C'

b) On a $B'C' = \frac{1}{3}\ BC = \frac{\sqrt{74}}{3}$ cm

c) Les droites (A'B') et (A'C') sont les images par h des droites (AB) et (AC) donc (A'B') et (AB) d'une part, (A'C') et (AC) d'autre part sont parallèles.

Comme (AB) et (AC) sont perpendiculaires, il s'ensuit que (A'B') et (A'C') sont aussi perpendiculaires. D'où le triangle A'B'C' est rectangle en A .

d) <u>Calcul de l'aire du triangle A'B'C' :</u>

Aire de A'B'C' = $\frac{A'C' \times A'B'}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{AC \times AB}{2} = \frac{35}{18}$ cm^2 .

On obtient que : Aire de A'B'C' = $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times$ aire(ABC)

<u>Essentiel à retenir :</u>

Propriétés

- L'image d'une figure par une homothétie est une figure de même nature.
- L'image d'un angle par une homothétie est angle de même mesure

- Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 .